Funkcje analityczne R. Lista 0

Ciągi.

Mówimy, że ciąg (z_n) liczb zespolonych jest *zbieżny do* z_∞, jeśli $|z_n - z_\infty| \to 0$ gdy $n \to \infty$. Mówimy, że jest on *ciągiem Cauchy'ego,* jeśli $|z_n - z_m| \to 0$ gdy $n, m \to \infty$.

1. Udowodnij, że ciąg liczb zespolonych (z_n)
   a) jest zbieżny $\iff$ ciągi $(\operatorname{Re} z_n)$ i $(\operatorname{Im} z_n)$ są zbieżne;
   b) jest Cauchy'ego $\iff$ ciągi $(\operatorname{Re} z_n)$ i $(\operatorname{Im} z_n)$ są Cauchy'ego.
2. Udowodnij, że $\mathbf{C}$ jest przestrzenią *zupełną,* tzn. że każdy ciąg Cauchy'ego liczb zespolonych jest zbieżny.

Podzbiory C.

Niech $B(z_0, r) = \{z \in \mathbf{C} \mid |z - z_0| < r\}$ będzie kołem o środku z_0 i promieniu r. Mówimy, że $U \subseteq \mathbf{C}$ jest *otwarty,* jeśli każdy jego punkt można otoczyć kołem zawartym w U: $(\forall z \in U)(\exists r > 0)(B(z, r) \subseteq U)$.

3. Sprawdź, że koło $B(z, r)$ i pas $\{z \in \mathbf{C} \mid 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$ są otwarte.

   Zbiór $D \subseteq \mathbf{C}$ jest *domknięty,* jeśli jego dopełnienie $\mathbf{C} \setminus D$ jest zbiorem otwartym.
4. Sprawdź, że koło $\overline{B}(z_0, r) = \{z \in \mathbf{C} \mid |z - z_0| \leq r\}$ i pas $\{z \in \mathbf{C} \mid 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1\}$ są domknięte.
5. Udowodnij, że $D \subseteq \mathbf{C}$ jest domknięty $\iff$ każdy zbieżny (w $\mathbf{C}$) ciąg elementów D ma granicę w D.

   Dla dowolnego $X \subseteq \mathbf{C}$ określamy
- *wnętrze* $\operatorname{Int} X = \{z \in \mathbf{C} \mid (\exists r > 0)(B(z, r) \subseteq X)\}$;
- *domknięcie* $\overline{X} = \{z \in \mathbf{C} \mid (\forall r > 0)(B(z, r) \cap X \neq \emptyset)\}$;
- *brzeg* $\partial X = \overline{X} \setminus \operatorname{Int} X = \{z \in \mathbf{C} \mid (\forall r > 0)((B(z, r) \cap X \neq \emptyset) \wedge (B(z, r) \cap (\mathbf{C} \setminus X) \neq \emptyset))\}$.

6. Niech $X \subseteq \mathbf{C}$.
   a) Udowodnij, że $\operatorname{Int} X$ jest największym (w sensie zawierania) otwartym podzbiorem X.
   b) Udowodnij, że $\overline{X}$ jest najmniejszym (w sensie zawierania) domkniętym nadzbiorem X.
   c) Udowodnij, że $\overline{X}$ jest zbiorem wszystkich możliwych granic zbieżnych ciągów elementów X.

Średnicą X nazywamy liczbę $\operatorname{diam} X = \sup\{|z - w| \mid z, w \in X\}$. Mówimy, że zbiór X jest *ograniczony,* jeśli $\operatorname{diam} X < \infty$.

7. Sprawdź, że X jest ograniczony $\iff$ $X \subseteq B(z_0, r)$ dla pewnego $z_0 \in \mathbf{C}$ i pewnego $r > 0$.

Zwartość.

Zbiór $K \subseteq \mathbf{C}$ nazywamy *zwartym,* jeśli każdy ciąg jego elementów ma podciąg zbieżny do granicy leżącej w K. *Pokryciem otwartym* zbioru K nazywamy rodzinę zbiorów otwartych, których suma zawiera X.

8. Niech $K \subseteq \mathbf{C}$. Udowodnij równoważność następujących warunków:
   - K jest zwarty;
   - K jest domknięty i ograniczony;
   - z każdego przeliczalnego pokrycia otwartego K można wybrać skończone podpokrycie;
   - * z każdego pokrycia otwartego K można wybrać skończone podpokrycie.
9. Udowodnij, że jeśli $K_1 \supseteq K_2 \supseteq K_3 \supseteq \ldots$ jest ciągiem zwartych podzbiorów $\mathbf{C}$ o średnicach dążących do zera, to ich przekrój $\bigcap_n K_n$ składa się z jednego elementu.

Ciągłość.

Niech $z_0 \in X \subseteq \mathbf{C}$. Funkcję $f\colon X \to \mathbf{C}$ nazywamy *ciągłą w* z_0, jeśli

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall z \in X)(|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \epsilon).$$

Równoważnie: dla każdego ciągu (z_n) elementów X zbieżnego do z_0 ciąg wartości $(f(z_n))$ zbiega do $f(z_0)$.

10. Udowodnij powyższą równoważność.

    Funkcję nazywamy ciągłą, jeśli jest ciągła w każdym punkcie swej dziedziny.
11. Niech $\Omega \subseteq \mathbf{C}$ będzie otwarty, i niech $f\colon \Omega \to \mathbf{C}$. Udowodnij, że f jest ciągła $\iff$ przeciwobrazy przez f zbiorów otwartych są otwarte.

12. Udowodnij, że funkcja ciągła o wartościach rzeczywistych określona na zbiorze zwartym osiąga maksimum i miniumum.
13. Przypomnij sobie definicję *jednostajnej ciągłości.* Wykaż, że funkcja ciągła określona na zbiorze zwartym jest jednostajnie ciągła.
14. Udowodnij, że ciągły obraz zbioru zwartego jest zwarty.

Spójność.

Zbiór $X \subseteq \mathbf{C}$ jest *niespójny,* jeśli istnieją dwa otwarte zbiory $U_0, U_1 \subseteq \mathbf{C}$, takie że przekroje $X \cap U_0$ i $X \cap U_1$ są niepuste, rozłączne, i razem pokrywają X. Zbiór jest *spójny,* jeśli nie jest niespójny.

15. Udowodnij, że zbiór otwarty/domknięty jest niespójny $\iff$ da się przedstawić w postaci sumy dwóch zbiorów niepustych, rozłącznych i otwartych/domkniętych.
16. Udowodnij, że zbiór X jest niespójny $\iff$ istnieje ciągła surjekcja $f \colon X \to \{0, 1\}$.
17. Udowodnij, że przedział $[0, 1]$ jest spójny.

Mówimy, że $X \subseteq \mathbf{C}$ jest *drogowo spójny,* jeśli każde dwa jego punkty można połączyć (ciągłą) drogą, tzn. jeśli dla każdych $x_0, x_1 \in X$ istnieje ciągła $\gamma \colon [a, b] \to X$, taka że $\gamma(a) = x_0$, $\gamma(b) = x_1$.

18. Niech $U \subseteq \mathbf{C}$ będzie otwarty. Udowodnij, że U jest spójny $\iff$ U jest drogowo spójny.
19. W definicji drogowej spójności można wymagać od γ więcej niż tylko ciągłości (np. by była C^∞, kawałkami C^1, łamaną, odcinkiem...). Czy teza poprzedniego zadania pozostaje wtedy prawdziwa?

Zbiór $\Omega \subseteq \mathbf{C}$ nazywamy *obszarem,* jeśli jest otwarty i spójny. O dziedzinach funkcji zespolonych czesto zakłada się, że są obszarami.

20. Udowodnij, że ciągły obraz zbioru spójnego jest spójny.