Funkcje analityczne R. Lista 3

Przypomnienie: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$, $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2}dx = 1$.

Całki pozornie rzeczywiste

1. Udowodnij, że
$$\int_0^\infty \sin x^2 dx = \int_0^\infty \cos x^2 dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$
[Całki te rozumiemy jako $\lim_{R\to\infty} \int_0^R$. Rozważ $\int_\Gamma e^{-z^2}dz$ dla $\Gamma = \partial\{z \in \mathbf{C} \mid 0 \le \arg z \le \pi/4, |z| < R\}$.]

2. Niech $a > 0$, $b \in \mathbf{R}$, $A = \sqrt{a^2+b^2}$. Oblicz całki
$$\int_0^\infty e^{-ax}\sin(bx)\,dx, \qquad \int_0^\infty e^{-ax}\cos(bx)\,dx$$
całkując funkcję e^{-Az} po brzegu odpowiedniego sektora o kącie rozwarcia $\arccos(a/A)$.

3. Udowodnij, że dla $\xi \in \mathbf{R}$ zachodzi wzór
$$\int_{-\infty}^\infty e^{-\pi x^2}\cos(2\pi x\xi)dx = e^{-\pi\xi^2}.$$
[Całkuj funkcję $e^{-\pi z^2}$ po prostokacie o bokach na prostych $\mathrm{Im}(z) = 0$, $\mathrm{Im}(z) = \xi$.]

Homotopia

4. Zdeformuj kontur i oblicz całkę:
$$\int_{[2,i,-2,-i,2]} \frac{e^{1+z^7}\cos z}{4+z^2}dz, \qquad \int_{[10,10i,-10,-10i,10]} \frac{dz}{z+3}.$$

5. Oblicz całki (rozłóż na ułamki proste; dla każdego z nich oddzielnie zdeformuj kontur):
$$\int_{2x^2+y^2=2021} \frac{dz}{1-z^2}, \qquad \int_{|x|+|y|=2021} \frac{5z^2-2z+3}{z^3-z^2+z-1}dz.$$

6. Oblicz całkę $\int_{\partial B(0,R)} \frac{dz}{z-w}$ dla (a) $|w| < R$; (b) $|w| > R$.

7. Uzasadnij, że homotopijność krzywych ciągłych jest relacją równoważności.

8. Niech γ_0, γ_1 będą zamkniętymi krzywymi w obszarze Ω. Niech $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Udowodnij, że jeśli krzywe γ_0 i γ_1 są (swobodnie) homotopijne w Ω, to
$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz.$$

9. (Dla porządku krzywa w tym zadaniu jest parametryzowana przedziałem $[0, 2\pi]$.) Sklasyfikuj ciągłe zamknięte krzywe w $\mathbf{C}\setminus\{0\}$ z dokładnością do homotopii:
   a) Udowodnij, że dowolna ciągła krzywa zamknięta w $\mathbf{C}\setminus\{0\}$ jest swobodnie homotopijna z pewną łamaną w $\mathbf{C}\setminus\{0\}$.
   b) Udowodnij, że dowolna zamknięta łamana w $\mathbf{C}\setminus\{0\}$ jest swobodnie homotopijna z zamkniętą krzywą o wartościach w okręgu $C(0,1)$ zbudowaną ze skończenie wielu przebieganych po kolei fragmentów poruszających się ze stałą prędkością kątową po łukach zawartych w półokręgach (dopuszczających parametryzację postaci $t \mapsto \exp(i(\alpha+\beta t))$).
   c) Udowodnij, że krzywa uzyskana w b) jest swobodnie homotopijna z krzywą postaci $t \mapsto \exp(int)$.

10. Wywnioskuj z poprzedniego zadania, że jeśli γ jest krzywą zamkniętą w $\mathbf{C} \setminus \{0\}$, to $\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i n$ dla pewnego całkowitego n, oraz że γ jest swobodnie homotopijna z krzywą $t \mapsto e^{int}$, $t \in [0, 2\pi]$ dla tegoż n.
11. Niech $\Omega = \mathbf{C} \setminus \{1, -1\}$ i niech $f_{a,b}(z) = \frac{a}{z-1} + \frac{b}{z+1}$ (dla $a, b \in \mathbf{C}$). Niech

$$\gamma_+(t) = 1 + e^{it}, \quad t \in [-\pi, \pi] \qquad \text{oraz} \qquad \gamma_-(t) = -1 + e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

 a) Oblicz $\int_{\gamma_+} f(z)dz$ i $\int_{\gamma_-} f(z)dz$.
 b) Stosując technikę przedpoprzedniego zadania uzasadnij, że każda zamknięta krzywa ciągła w Ω jest swobodnie homotopijna z krzywą zbudowaną z krzywych γ_+ i γ_- (być może obieganych wielokrotnie, na przemian, w różne strony…).
 c) Wywnioskuj, że dla zamkniętej krzywej γ w Ω mamy

$$\int_\gamma f_{a,b}(z)dz = 2\pi i(na + mb), \qquad \text{dla pewnych } n, m \in \mathbf{Z}.$$

12. Niech γ będzie ciągłą krzywą w Ω a $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Zdefiniuj $\int_\gamma f(z)dz$. (Wsk. użyj przybliżeń γ krzywymi; uzasadnij, że każde dwa dostatecznie dobre takie przybliżenia są homotopijne.)
13. Niech $P(z)$ będzie zespolonym wielomianem stopnia $n > 0$. Rozważmy krzywą $\gamma_r(t) = P(re^{it}), t \in [0, 2\pi]$ (dla $r > 0$).
 ∞) Udowodnij, że dla dostatecznie dużych r zachodzi $\dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{\gamma_r} \dfrac{dz}{z} = n$.
 0) Udowodnij, że jeśli wyraz wolny $P(z)$ jest niezerowy, to dla dostatecznie małych r zachodzi

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{dz}{z} = 0.$$

 ß) Wywnioskuj zasadnicze tw. algebry.