Funkcje analityczne R. Lista 4

1. Uzasadnij, że jeśli $f = u + iv$ jest holomorficzna, to u i v są klasy C^2.

Wzór Cauchy'ego

2. Oblicz całki:

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z} dz, \qquad \int_{|z|=2} \frac{dz}{1+z^2}, \qquad \int_{|z-3|=3} \frac{z dz}{z^4 - 1}, \qquad \int_{|z+1/2|=1} \frac{dz}{z(1+z^2)}.$$

3. Udowodnij, że jeśli $f \in \mathcal{O}(B(z_0, R))$ oraz $0 < r < R$, to

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt.$$

4 Oblicz $\int_{\partial B(z_0,r)} f(z)|dz|$ dla f holomorficznej w otoczeniu $\overline{B}(z_0, r)$.

5. Domknięty trójkąt T jest zawarty w obszarze Ω, w którym f jest holomorficzna. Udowodnij, że dla z z wnętrza T zachodzi $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial T} \frac{f(w)}{w-z} dw$.

6. Niech $f \in \mathcal{O}(A(r, R))$, gdzie $A(r, R) = \{z \in \mathbf{C} \mid r < |z| < R\}$. Udowodnij, że jeżeli $r < q < |z| < Q < R$, to

$$f(z) = \int_{\partial B(0,Q)} \frac{f(w)}{w-z} dw - \int_{\partial B(0,q)} \frac{f(w)}{w-z} dw.$$

7. Oblicz

$$\int_{\partial B(0,2)} \frac{\sin(1/z)}{\pi z - 4} dz - \int_{\partial B(0,1)} \frac{\sin(1/z)}{\pi z - 4} dz.$$

Nierówności Cauchy'ego dla pochodnych; Liouville

Funkcja całkowita to funkcja z $\mathcal{O}(\mathbf{C})$.

8. Wyznacz wszystkie funkcje całkowite f spełniające $f'' + f = 0$, $f(0) = 0$ i $f'(0) = 1$.

9. Niech f będzie niestałą funkcją całkowitą. Połóżmy $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$.
Udowodnij, że $\lim\limits_{r\to+\infty} M(r) = +\infty$.

10. Jeśli f całkowita spełnia $|f(z)| > 1$ dla wszystkich z, to jest stała.

11. Jeśli f całkowita spełnia $\operatorname{Im} f(z) > 0$ dla wszystkich z, to jest stała.

12. Załóżmy, że f jest całkowita. Pokaż, że
   a) Jeśli f spełnia $|f(z)| \leq 100|z|^k$ dla dostatecznie dużych $|z|$, to f jest wielomianem stopnia $\leq k$.
   b) Jeśli $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$, to $f \equiv 0$.
   c) Jeśli dla wszystkich z zachodzi $|f(z)| \leq 1 + |z|^{3/2}$, to $f(z) = a + bz$ dla pewnych $a, b \in \mathbf{C}$.

13. Udowodnij, że każda dwuokresowa funkcja całkowita jest stała. [Funkcja f jest dwuokresowa, jeśli istnieją liczby zespolone ω_1, ω_2 z których żadna nie jest rzeczywistą krotnością drugiej, takie że f spełnia dla każdego z warunek $f(z) = f(z + \omega_1) = f(z + \omega_2)$.]

14. Opisz wszystkie funkcje całkowite dla których $|f(z)|$ zależy tylko od $|z|$.

15. Udowodnij, że jeśli $f \in \mathcal{O}(B(z_0, R))$ oraz $0 < r < R$, to

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})| dt.$$

16. Niech $f \in \mathcal{O}(B(0, 1))$.
   a) Udowodnij, że $\operatorname{diam} f[B(0, 1)] \geq |f'(0)|$.
   b)* Udowodnij, że $\operatorname{diam} f[B(0, 1)] \geq 2|f'(0)|$.

17. Udowodnij, że jeśli funkcja holomorficzna f posyła koło $B(z_0, r)$ w pewne koło o promieniu s, to $|f'(z_0)| \leq s/r$.
18. Niech $f(x) = (1 + x^2)^{-1}$. Udowodnij, że istnieje stała $C > 0$, taka że dla wszystkich n całkowitych dodatnich zachodzi $|f^{(n)}(\pi)| < C \cdot n! \cdot 10^{-n/2}$.
19. Załóżmy, że f jest holomorficzna w pasie $-1 < \mathrm{Im}(z) < 1$ i spełnia tam nierówność

$$|f(z)| \leq A(1 + |z|)^\eta$$

(dla pewnych rzeczywistych stałych A, η). Udowodnij, że dla każdego naturalnego n istnieje $A_n \geq 0$, takie że dla wszystkich $x \in \mathbf{R}$ zachodzi

$$|f^{(n)}(x)| \leq A_n(1 + |x|)^\eta.$$

Kącik całkowy

20. Oblicz całki

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iz}}{z^2+1} dz, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iz}}{z^2+1} dz, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iyx}}{x^2+1} dx \quad (y \in \mathbf{R}).$$