Funkcje analityczne R. Lista 8

Dywizory

1. Dla obszaru $\Omega \subseteq \overline{\mathbf{C}}$ algebra funkcji $\mathcal{M}(\Omega)$ jest ciałem. Nadaj temu stwierdzeniu sens i uzasadnij je.

Dywizorem na sferze Riemanna nazywamy skończoną formalną kombinację punktów $\overline{\mathbf{C}}$ z całkowitymi współczynnikami, czyli wyrażenie postaci $\sum_{i=1}^{k} n_i p_i$, gdzie $p_i \in \overline{\mathbf{C}}$, $n_i \in \mathbf{Z}$. Z naturalną operacją dodawania dywizory tworzą grupę abelową $\mathrm{Div}(\overline{\mathbf{C}})$.

2. Sprawdź, że odwzorowanie *stopnia* $\deg\colon \mathrm{Div}(\overline{\mathbf{C}}) \to \mathbf{Z}$ dane wzorem $\deg(\sum n_i p_i) = \sum n_i$ jest homomorfizmem grup.
3. Niezerowej funkcji meromorficznej $f \in \mathrm{Div}(\overline{\mathbf{C}})$ przypiszmy jej dywizor: $(f) := \sum_{s\in\overline{\mathbf{C}}} \mathrm{ord}_s(f) \cdot s$. Udowodnij, że
   a) odwzorowanie $f \mapsto (f)$ jest homomorfizmem grupy multyplikatywnej ciała $\mathcal{M}(\overline{\mathbf{C}})$ w $\mathrm{Div}(\overline{\mathbf{C}})$;
   b) dla każdej niezerowej $f \in \mathcal{M}(\overline{\mathbf{C}})$ zachodzi $\deg((f)) = 0$;
   c) dla każdego niezerowego dywizora $D \in \mathrm{Div}(\overline{\mathbf{C}})$ o stopniu 0 istnieje funkcja $f \in \mathcal{M}(\overline{\mathbf{C}})$, taka że $D = (f)$. Czy taka f jest jedyna?
   d) Jeśli wiesz, co to jest ciąg dokładny: napisz ciąg dokładny grup abelowych który skonstruowałeś w tym zadaniu.
4. Niech $D \in \mathrm{Div}(\overline{\mathbf{C}})$, i niech

$$L(D) = \{f \in \mathcal{M}(\overline{\mathbf{C}}) \setminus \{0\} \mid (f) + D \geq 0\} \cup \{0\}$$

   ($D \geq 0$ znaczy: D ma nieujemne współczynniki.) Udowodnij, że $\dim_{\mathbf{C}} L(D) = \max(1 + \deg(D), 0)$.

Residuum w nieskończoności

5. Niech $f \in \mathcal{O}(A(r,\infty))$ będzie funkcją z izolowaną osobliwością w ∞.
   a) Udowodnij, że dla $R > r$

$$\int_{\partial B(0,R)} f(z)dz = -\int_{\partial B(0,\frac{1}{R})} f\left(\frac{1}{w}\right) d\left(\frac{1}{w}\right) = -\int_{\partial B(0,\frac{1}{R})} f\left(\frac{1}{w}\right)\left(-\frac{1}{w^2}\right) dw.$$

   b) Definiujemy $\mathrm{Res}(f(z),\infty) := \mathrm{Res}(-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0)$. Przemyśl motywację wyboru znaku. Zastanów się, jaki obiekt ma residuum: funkcja $f(z)$ czy "forma" $f(z)dz$.
   c) Udowodnij, że dla $f \in \mathcal{M}(\overline{\mathbf{C}})$ zachodzi

$$\sum_{s\in\overline{\mathbf{C}}} \mathrm{Res}(f,s) = 0.$$

6. Niech f, g będą holomorficzne w otoczeniu s. Uzasadnij, że jeśli f ma w s zero rzędu 1, zaś $g(s) \neq 0$, to funkcja $\frac{g(z)}{f(z)}$ ma w s biegun prosty z residuum $\frac{g(s)}{f'(s)}$.
7. Załóżmy, że $P(z), Q(z) \in \mathbf{C}[z]$, przy czym pierwiastki $Q(z)$ są jednokrotne oraz $\deg Q(z) \geq \deg P(z) + 2$. Udowodnij, że wtedy

$$\sum_{s\in Z(Q)} \frac{P(s)}{Q'(s)} = 0.$$

8. Oblicz $\int_{|z|=2} \frac{dz}{(z^8+1)^2}$.

Kącik całkowy

9. Dla $y \in \mathbf{R}$ udowodnij wzór

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ixy}}{(1+x^2)^2} dx = \frac{\pi}{2}(1+|y|)e^{-|y|}.$$