Exponens

Definicja.

$$\exp(z) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$R = \infty$, $\exp: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

Podstawowe własności

1. $e^{z+w} = e^z e^w$

$$e^{z+w} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(n-k)!} z^k w^{n-k} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \frac{w^{n-k}}{(n-k)!} = \left(\sum \frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum \frac{w^n}{n!}\right) = e^z e^w$$

2. $(e^z)' = e^z$

$$(e^z)' = \left(\sum \frac{z^n}{n!}\right)' = \sum \frac{n z^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = e^z$$

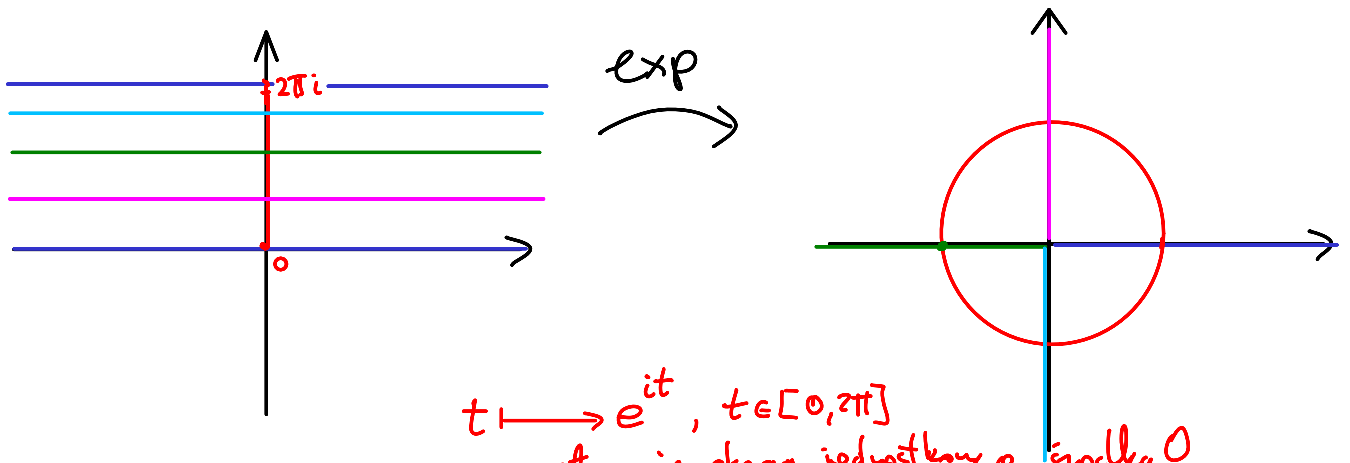
3. $e^{it} = \cos t + i \sin t$

$$e^{it} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} = \sum_{2|n} + \sum_{2\nmid n} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos t + i \sin t$$

4. Eksponens jest okresowy: $\exp(z + 2\pi i) = \exp(z)$.

$$e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z (\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = e^z$$

5. Rysunki. $e^{a+bi} = e^a e^{bi} = e^a(\cos b + i \sin b)$



$t \longmapsto e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$
parametryzuje okrąg jednostkowy o środku 0

$t \longmapsto z_0 + R e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$
parametryzuje okrąg o środku z_0 i promieniu R $(C(z_0, R))$

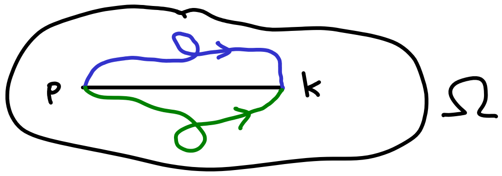
Całka po krzywej – w poszukiwaniu definicji

- Dla rzeczywistych $p < k$ i funkcji $f\colon [p,k] \to \mathbf{C}$, $f = u + iv$ (gdzie $u, v\colon [p,k] \to \mathbf{R}$) określamy

$$f'(x) = u'(x) + iv'(x)$$

$$\int_p^k f(x)dx = \int_p^k u(x)dx + i\int_p^k v(x)dx$$

- $\int_p^k f(x)dx = F(k) - F(p)$ jeśli $F' = f$. Niech $f \in C(\Omega)$ – czy można użyć innych krzywych z p do k?



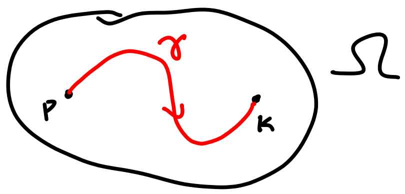
- Już w $\mathbf{R}$ jest dużo krzywych z p do k!
  $\gamma\colon [a,b] \to [p,k]$, C^1, $\gamma(a) = p$, $\gamma(b) = k$, $\gamma' > 0$.
  $F(k) - F(p) = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = \int_a^b \frac{d}{dt}[F(\gamma(t))]\,dt \overset{(*)}{=}$

γ kawałkami C^1

$$= \int_a^b F'(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt \quad \left(= \int_p^k f(x)\,dx\right)$$

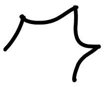
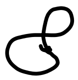
- Ten sam rachunek ma sens dla $F, f\colon \Omega \to \mathbf{C}$, $F' = f$, f ciągłej.
  Zdefiniujemy więc

  $\int_\gamma f(z)dz$ jako $\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$.



Co to jest krzywa

Krzywa w Ω to $\gamma\colon [a,b] \to \Omega$. Krzywa jest:

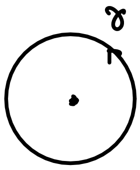
- ciągła : gdy γ jest ciągła;
- C^1 : gdy γ' jest ciągła (w tym w a i w b);
- C^1, regularna : gdy γ' jest ciagła i γ' nie zeruje się w $[a,b]$; ⟵ krzywa gładka
- kawałkami C^1, regularna : gdy istnieją $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_k = b$ takie że $\gamma|_{[a_{i-1},a_i]}$ są C^1, regularne; ⟵ krzywa
- zamknięta : gdy $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Definicja
Dla krzywej $\gamma\colon [a,b] \to \Omega$ i ciągłej $f\colon \Omega \to \mathbf{C}$ definiujemy

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

Fakt
W założeniach definicji:
1) jeśli $f = F'$ dla $F \in \mathcal{O}(\Omega)$, to $\int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$;
2) jeśli $f = F'$ i γ jest zamknięta, to $\int_\gamma f(z)dz = 0$.

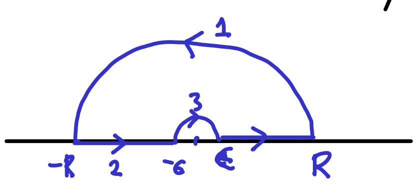
Przykład.
Niech $\Omega = \mathbf{C} \setminus \{0\}$, $f(z) = \frac{1}{z}$, $\gamma(t) = e^{it}$ dla $t \in [0, 2\pi]$.



$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} \cdot ie^{it}\,dt = \int_0^{2\pi} i\,dt = 2\pi i \neq 0$$

$\frac{1}{z}$ nie ma pierwotnej w $\mathbb{C}\setminus\{0\}$

Przykład. (krzywej)



$$\gamma_1(t) = Re^{it}, \quad t \in [0,\pi]$$
$$\gamma_2(t) = t, \quad t \in [-R,-\epsilon]$$
$$\gamma_3(t) = \epsilon e^{-it}, \quad t \in [-\pi, 0]$$
$$\gamma_4(t) = t, \quad t \in [\epsilon, R]$$

$$\gamma\colon [0,4] \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(\pi t), & t \in [0,1] \\ \gamma_2(-R + (R-\epsilon)(t-1)), & t \in [1,2] \\ \gamma_3(\pi(t-3)), & t \in [2,3] \\ \gamma_4(\epsilon + (R-\epsilon)(t-3)), & t \in [3,4] \end{cases}$$

Zmiana parametryzacji

Definicja

Dwie krzywe $\gamma\colon [a,b] \to \Omega$ i $\eta\colon [c,d] \to \Omega$ są *równoważne,* jeśli istnieje kawałkami-C^1-funkcja $s\colon [a,b] \to [c,d]$, taka że

1) $\gamma(t) = \eta(s(t))$;
2) $(\forall t \in [a,b])(s'(t) > 0)$;
3) $s(a) = c$, $s(b) = d$.

Lemat

Jeśli $f \in C(\Omega)$ zaś γ, η są równoważnymi krzywymi w Ω, to

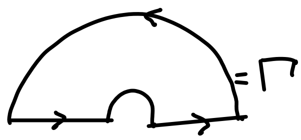
$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\eta f(z)dz$$

Dowód.

$$\int_\eta f(z)dz = \int_c^d f(\eta(s))\eta'(s)\,ds \underset{s=s(t)}{=} \int_a^b f(\eta(s(t)))\underbrace{\eta'(s(t))\,s'(t)}_{\gamma'(t)}dt = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = \int_\gamma f(z)dz \qquad \square$$

Przykład, cd.

$\displaystyle\int_\gamma f(z)dz = \sum_{i=1}^{4}\int_{\gamma_i} f(z)dz$



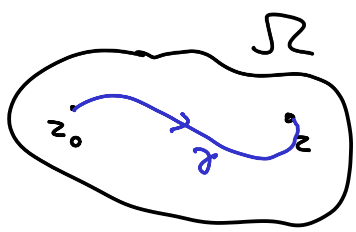
Będziemy często pisać

$\displaystyle\int_\Gamma f(z)dz$ z domniemaną parametryzacją konturu Γ.

Fakt

Niech Ω będzie obszarem, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, $f' \equiv 0$. Wtedy f jest stała.

Dowód.



ustalmy $z_0 \in \Omega$.

$\forall z \in \Omega$ $\exists$ krzywa γ w Ω łącząca z_0 i z.

$$f(z) - f(z_0) = \int_\gamma f'(z)\,dz = \int_\gamma 0\,dz = 0 \qquad \square$$

Oczywiste własności całki

Fakt

Niech $f, g \in C(\Omega)$, $\gamma\colon [a,b] \to \Omega$ – krzywa.

1)

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbf{C}, \qquad \int_\gamma (\alpha f(z) + \beta g(z))dz = \alpha \int_\gamma f(z)dz + \beta \int_\gamma g(z)dz$$

2) Niech $\overline{\gamma}\colon [-b,-a] \to \Omega$, $\overline{\gamma}(t) = \gamma(-t)$. Wtedy

$$\int_{\overline{\gamma}} f(z)dz = -\int_\gamma f(z)dz$$

3) Niech $\gamma^* = \gamma[[a,b]]$ będzie obrazem krzywej γ. Wtedy

$\gamma^* = \gamma([a,b])$

$$\left| \int_\gamma f(z)dz \right| \leq \sup_{z \in \gamma^*} |f(z)| \cdot \ell(\gamma).$$

<u>D-d:</u>

3) $$\left| \int_\gamma f(z)dz \right| \leq \left| \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt \right| \leq \int_a^b \underbrace{|f(\gamma(t))|}_{\leq \sup_{z\in\gamma^*} |f(z)|} |\gamma'(t)|dt \leq$$

$$\leq \sup_{z\in\gamma^*} |f(z)| \cdot \underbrace{\int_a^b |\gamma'(t)|dt}_{\ell(\gamma)}$$

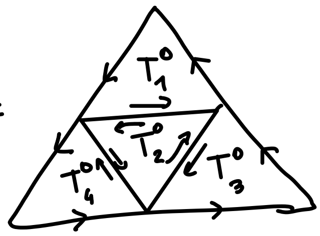
Lemat Goursata

Twierdzenie
Załóżmy, że T jest domkniętym trójkątem zawartym w obszarze Ω. Niech $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Wtedy

$$\int_{\partial T} f(z)dz = 0$$

Dowód.

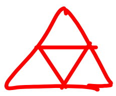
$T^0 := T =$



$$\int_{\partial T^0} f(z)dz = \sum_{k=1}^{k} \int_{\partial T_k^0} f(z)dz$$

dla pewnego k: $\left| \int_{\partial T_k^0} f(z)dz \right| \geqslant \frac{1}{4} \left| \int_{\partial T^0} f(z)dz \right|$

$T^1 = T_3^0$:



Niech $T^1 = T_k^0$ z powyższym k.

Powtarzamy, definiując przez indukcję ciąg trójkątów T^n taki że

$$\left| \int_{\partial T^{n+1}} f(z)dz \right| \geq \frac{1}{4} \left| \int_{\partial T^n} f(z)dz \right|$$

$$d_{n+1} = \operatorname{diam} T^{n+1} = \frac{1}{2} \operatorname{diam} T^n = \frac{1}{2} d_n$$

$$p_{n+1} = \ell(\partial T^{n+1}) = \frac{1}{2} \ell(\partial T^n) = \frac{1}{2} p_n$$

Stąd dostajemy: $d_n = 2^{-n} d_0$, $p_n = 2^{-n} p_0$, $\left| \int_{\partial T^n} f(z)dz \right| \geq 4^{-n} \left| \int_{\partial T^0} f(z)dz \right|$.
Zstępujący ciąg trójkątów $T^0 \supset T^1 \supset T^2 \supset \ldots$ składa się ze zbiorów zwartych o średnicach dążących do 0 – zatem $\bigcap T^n = \{z_0\}$ dla pewnego $z_0 \in T$. Zapiszmy holomorficzność f w z_0:

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \psi(z)(z - z_0), \qquad \psi(z) \to 0 \quad \text{gdy} \quad z \to z_0$$

$$\int_{\partial T^n} f(z)\,dz = \int_{\partial T^n} f(z_0)\,dz + \int_{\partial T^n} f'(z_0)(z-z_0)\,dz + \int_{\partial T^n} \psi(z)(z-z_0)\,dz = \int_{\partial T^n} \psi(z)(z-z_0)\,dz$$

równe 0, bo funkcje całkowane mają pierwotne:
$f(z_0) \cdot z$, $\frac{1}{2} f'(z_0)(z-z_0)^2$

Niech $\epsilon_n = \sup_{z \in \partial T^n} |\psi(z)|$;

$\epsilon_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

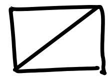
(bo gdy $z \in \partial T^n$, $|z - z_0| \leqslant \operatorname{diam} T^n = d_n \to 0$
a $\lim_{z \to z_0} \psi(z) = 0$)

$$\left| \int_{\partial T^n} f(z)dz \right|$$
$$\parallel$$
$$\left| \int_{\partial T^n} \psi(z)(z-z_0)dz \right| \leqslant \sup_{z \in \partial T^n} |\psi(z)||z-z_0| \cdot \ell(\partial T^n) \leqslant \epsilon_n \cdot d_n \cdot p_n = \epsilon_n \cdot 2^{-n} d_0 \cdot 2^{-n} p_0$$

$$\left| \int_{\partial T^0} f(z)dz \right| \leqslant 4^n \left| \int_{\partial T^n} f(z)dz \right| \leqslant 4^n \cdot \epsilon_n \cdot 4^{-n} d_0 p_0 = \epsilon_n d_0 p_0 \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

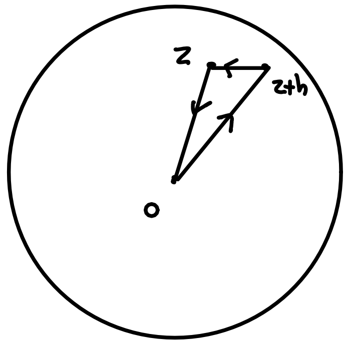
$\square$

Twierdzenie Cauchy'ego dla dysku



Wniosek (niezbyt poważny)
Dla $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ i domkniętego prostokąta $R \subseteq \Omega$ mamy $\int_{\partial R} f(z)dz = 0$.

Twierdzenie
Funkcja holomorficzna w kole otwartym ma pierwotną.



Dowód. BSO: koło to $B(0,R)$, $f \in \mathcal{O}(B(0,R))$.
Dla $z \in B(0,R)$ kładziemy $F(z) = \int_{[0,z]} f(w)dw$

Gourşat: $$\int_{\partial\Delta(0,z,z+h)} f(w)dw = 0$$
$$\| $$
$$F(z+h) - F(z) - \int_{[z,z+h]} f(w)\,dw$$

$$\frac{1}{h}\big(F(z+h)-F(z)\big) = \frac{1}{h}\int_{[z,z+h]} f(w)dw = \frac{1}{h}\left(\int_{[z,z+h]} f(z)\,dw + \int_{[z,z+h]} (f(w)-f(z))\,dw\right) =$$

$$= \frac{1}{h}\cdot f(z)\big((z+h)-z\big) + \dots = f(z) + \dots \xrightarrow[h\to 0]{} f(z)$$

$$\left|\frac{1}{h}\int_{[z,z+h]} (f(w)-f(z))dw\right| \leq \underbrace{\sup_{w\in[z,z+h]} |f(w)-f(z)|}_{\substack{\downarrow h\to 0 \\ 0}} \cdot \underbrace{\ell([z,z+h])}_{= |h|} \cdot \frac{1}{|h|} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

f ciągła w z.

$\square$

Wniosek 1. (Twierdzenie Cauchy'ego dla dysku)
Niech $f \in \mathcal{O}(B)$, γ – zamknięta krzywa w dysku B. Wtedy $\int_\gamma f(z)dz = 0$.

Wniosek 2.
Niech $f \in \mathcal{O}(B)$, γ, η – krzywe w B o wspólnym początku p i końcu k. Wtedy $\int_\gamma f(z)dz = \int_\eta f(z)dz$.