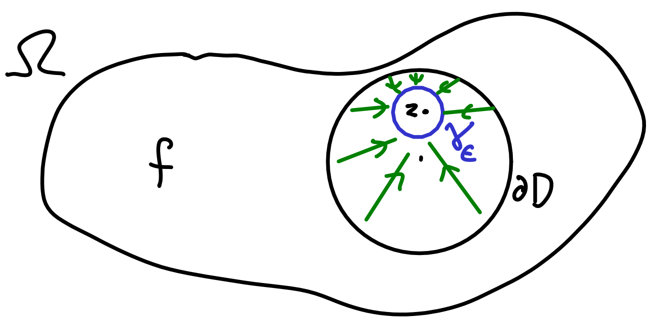
Cauchy

Twierdzenie (wzór Cauchy'ego)

Niech Ω będzie obszarem w $\mathbf{C}$, $D = B(z_0, R)$ dyskiem, którego domknięcie zawiera się w Ω, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Wtedy dla $z \in D$ zachodzi

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \underbrace{\frac{f(w)}{w-z}}_{\mathcal{O}(\Omega\setminus\{z\})} dw.$$

Dowód.



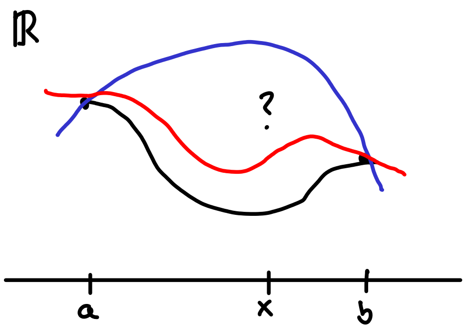
Niech $\gamma_\epsilon(t) = z + \epsilon e^{it}, t \in [0, 2\pi]$ będzie małym okręgiem wokół z. Funkcja $\frac{f(w)}{w-z}$ zmiennej w jest holomorficzna w $\Omega \setminus \{z\}$, zaś $\gamma_\epsilon \sim \partial D$ w $\Omega \setminus \{z\}$; zatem

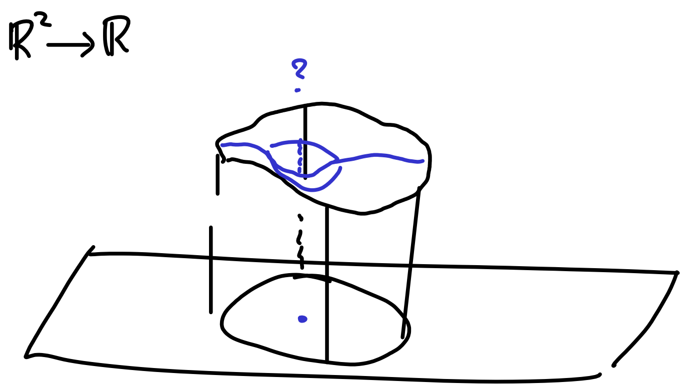
$$\int_{\partial D} \frac{f(w)}{w-z}dw = \int_{\gamma_\epsilon} \frac{f(w)}{w-z}dw = \int_{\gamma_\epsilon} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}dw + \underline{\int_{\gamma_\epsilon} \frac{f(z)}{w-z}dw}$$

$$\left|\int_{\gamma_\epsilon} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}dw\right| \le \underbrace{\sup_{w\in\gamma_\epsilon^*}\left|\frac{f(w)-f(z)}{w-z}\right|}_{\downarrow\,\epsilon\to 0\ \ |f'(z)|} \cdot \underbrace{\ell(\gamma_\epsilon)}_{=\,2\pi\epsilon} \xrightarrow[\epsilon\to 0]{} 0$$

$$\int_{\gamma_\epsilon} \frac{f(z)}{w-z}dw = f(z)\int_0^{2\pi} \frac{1}{\cancel{z}+\epsilon e^{it}-\cancel{z}}\,\epsilon i e^{it}\,dt = f(z)\int_0^{2\pi} i\,dt = f(z)\cdot 2\pi i$$

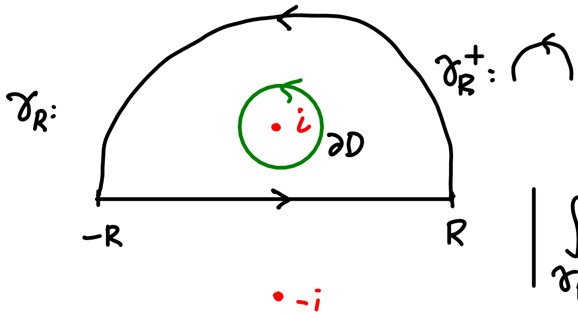
□





Przykład.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$



$$\parallel$$

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{dz}{1+z^2} = \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{dz}{1+z^2}$$

$$\left| \int_{\gamma_R^+} \frac{dz}{1+z^2} \right| \leqslant \sup_{z\in(\gamma_R^+)^*} \left| \frac{1}{1+z^2} \right| \cdot \ell(\gamma_R^+) \leqslant \frac{1}{R^2-1} \cdot \pi R \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

$$|1+z^2| \geqslant |z^2| - 1 = R^2 - 1$$

$$\frac{1}{1+z^2} \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \{\pm i\})$$

$$\int_{\gamma_R} \frac{dz}{1+z^2} = \int_{\partial D(i,\epsilon)} \frac{dz}{1+z^2} = \int_{\partial D} \frac{dz}{(z+i)(z-i)} = \int_{\partial D} \frac{\overbrace{\frac{1}{z+i}}^{f(z)}}{z-i}\, dz = 2\pi i \cdot f(i)$$

$$\parallel$$

$$2\pi i \cdot \frac{1}{2i}$$

$$\parallel$$

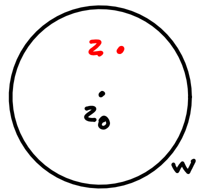
$$\pi$$

Twierdzenie

Niech Ω będzie obszarem w $\mathbf{C}$, $D = B(z_0, R)$ dyskiem, którego domknięcie zawiera się w Ω, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Wtedy f rozwija się w z_0 w szereg potęgowy, zbieżny w D do f (jednostajnie).

Dowód.

Niech $z \in D$. Wtedy $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(w)}{w-z}dw$.



$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-z_0)-(z-z_0)} = \frac{1}{w-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{w-z_0}} =$$

$$= \frac{1}{w-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}$$

$$\left|\frac{z-z_0}{w-z_0}\right| = r < 1$$

dla wszystkich $w \in \partial D$
(r nie zależy od w, ale zależy od z)

szereg zbiega jednostajnie względem $w \in \partial D$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} f(w)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}\,dw = \sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,dw\right)}_{=\ \frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)}(z-z_0)^n$$

By uzasadnić jednostajność zbieżności w D stosujemy powyższy argument do nieco większego dysku $\overline{B}(z_0, R+\epsilon) \subseteq \Omega$.

Bonus: $f^{(n)}(z_0) = \dfrac{n!}{2\pi i}\displaystyle\int_{\partial D}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw$

Wnioski

Funkcja $f \in \mathcal{O}(\Omega)$:

- jest różniczkowalna w Ω nieskończenie wiele razy;
- w każdym $z_0 \in \Omega$ rozwija się w szereg potęgowy, zbieżny do f w $B(z_0, \rho)$ dla $\rho = d(z_0, \partial\Omega)$;
- spełnia następujące szacowanie pochodnych w $z_0 \in \Omega$:

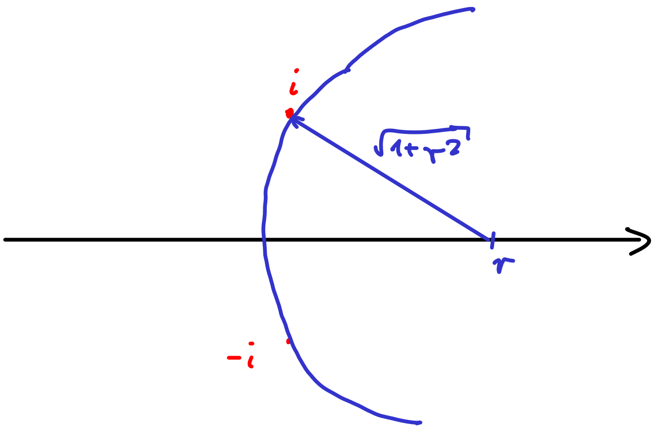
$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{Mn!}{R^n},$$

gdzie $\overline{B}(z_0, R) \subseteq \Omega$ a $M = \sup\{|f(z)| \mid |z - z_0| = R\}$.

Przykład.

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2}, \qquad f \in \mathcal{O}(\mathbf{C} \setminus \{\pm i\}).$$

- f rozwija się wokół $r \in \mathbf{R}$ w szereg potęgowy o promieniu zbieżności $\sqrt{1+r^2}$.

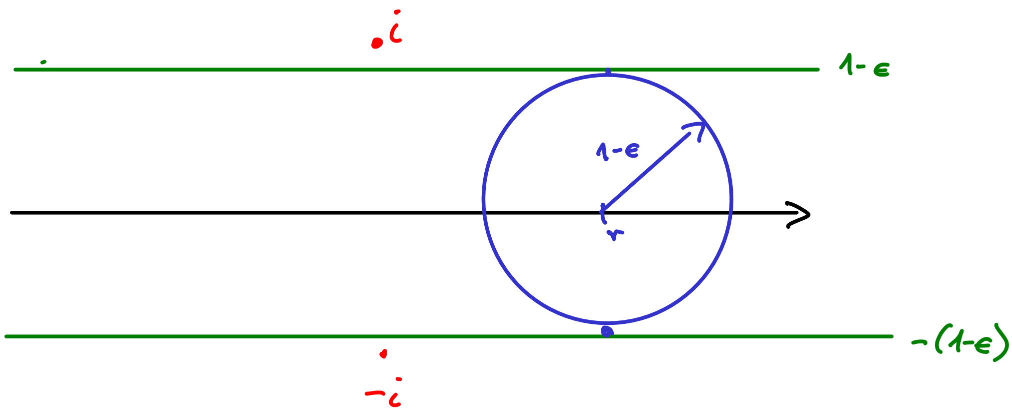


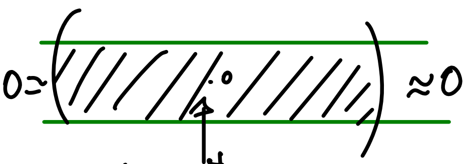
- $\forall \epsilon > 0 \quad \exists M_\epsilon > 0 \quad \forall r \in \mathbf{R} \quad \forall n \in \mathbf{N} \qquad |f^{(n)}(r)| \leq \dfrac{M_\epsilon n!}{(1-\epsilon)^n}$

$M_\epsilon = \sup\{|f(z)| \mid -(1-\epsilon) \leq \mathrm{Im}(z) \leq 1-\epsilon\}$

$$\frac{1}{1+z^2}$$

$$\lim_{z\to\infty} |f(z)| = 0$$





zwarte;
tu $|f(z)|$ osiąga maksimum.

$\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

$\dfrac{1}{1+z^2}$ – granica ∞ w $\pm i$ $\notin \mathcal{O}(\mathbb{C})$

Twierdzenie (Liouville)
Ograniczona funkcja $f \in \mathcal{O}(\mathbf{C})$ jest stała.

Dowód.
Niech $M = \sup\{|f(z)| \mid z \in \mathbf{C}\}$. Wtedy dla każdego R zachodzi

$$|f^{(n)}(0)| \le \frac{Mn!}{R^n};$$

stąd, dla $n \ge 1$, $f^{(n)}(0) = 0$. Rozwijamy w szereg w 0:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = f(0).$$

Wniosek (zasadnicze twierdzenie algebry)
Zespolony wielomian dodatniego stopnia ma zespolony pierwiastek.

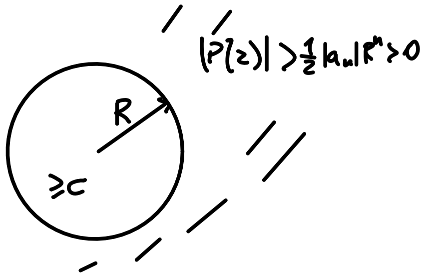
Dowód.
Nie wprost: załóżmy, że $P(z)$ nigdzie się nie zeruje. Wtedy $f(z) = \frac{1}{P(z)}$ jest holomorficzna w $\mathbf{C}$. Zastosujemy do niej tw. Liouville'a; w tym celu pokażemy, że jest to funkcja ograniczona – czyli pokażemy, że $|P(z)|$ jest ograniczone z dołu przez pewną liczbę dodatnią.

Strategia: poza dużym dyskiem wielomian jest duży, a w (domkniętym) dysku funkcja $|P(z)|$ osiąga minimum z powodu zwartości dysku.

Duże $|z|$: niech $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$, $a_n \neq 0$. Mamy

$$\frac{P(z)}{z^n} = a_n + \left(\frac{a_{n-1}}{z} + \ldots + \frac{a_0}{z^n}\right) \xrightarrow{z \to \infty} a_n$$

$$\left|\frac{P(z)}{z^n} - a_n\right| < \frac{1}{2}|a_n| \quad \text{dla } |z| \ge R$$



$$\left|\frac{P(z)}{z^n}\right| \geq \frac{1}{2}|a_n| \quad \text{dla } |z| \ge R$$

$$|P(z)| \geq \frac{1}{2}|a_n||z|^n \geq \frac{1}{2}|a_n|R^n > 0$$

Małe $|z|$: funkcja $\overline{B}(0,R) \ni z \mapsto |P(z)| \in \mathbf{R}_+$ jest ciągłą funkcją określoną na zbiorze zwartym; osiąga ona dodatnie minimum c. Zatem

$$|P(z)| \ge c > 0 \qquad \text{dla } |z| \le R.$$

$\forall z \in \mathbb{C} \quad |P(z)| \geq \min\left(c, \frac{1}{2}|a_n|R^n\right) =: m$

$|f(z)| = \left|\dfrac{1}{P(z)}\right| \leq \dfrac{1}{m}$

Liouville: $f(z) = \text{const}$, stąd $P(z) = \text{const}$ $\lightning$ z $\deg P > 0$ $\square$

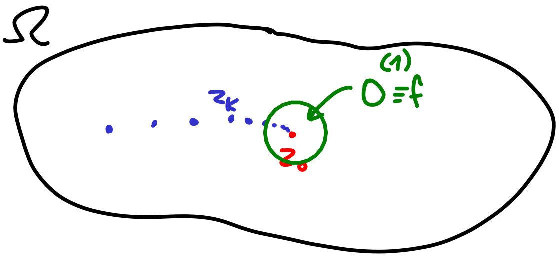
Kontynuacja analityczna

Twierdzenie

Niech f będzie holomorficzna w obszarze Ω. Załóżmy, że zbiór zer f ma w Ω punkt skupienia. Wtedy $f \equiv 0$.

Dowód

Z założenia: istnieje ciąg parami różnych zer z_k funkcji f zbieżny do pewnego $z_0 \in \Omega$.



$$f(z_0) = \lim_{k\to\infty} f(z_k) = \lim 0 = 0$$

1) Pokażemy, że f jest zerowa w otoczeniu z_0. Rozwińmy f w szereg potęgowy w z_0: dla $z \in B(z_0, R)$ mamy $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$. Załóżmy nie wprost, że ten szereg nie jest zerowy – niech a_m będzie jego pierwszym niezerowym współczynnikiem.

$$f(z) = a_m (z - z_0)^m \left(\sum_{n=m}^{\infty} \frac{a_n}{a_m} (z - z_0)^{n-m} \right) = a_m (z - z_0)^m (1 + g(z - z_0))$$

g holomorficzna w $B(0,R)$

$g(0) = 0$

Podstawmy $z = z_k$:

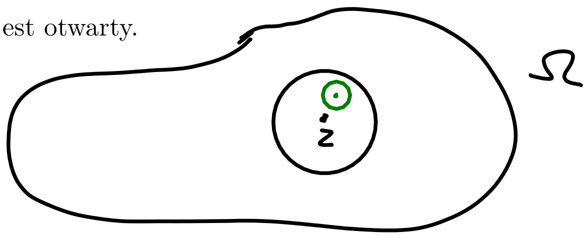
$$0 = f(z_k) = \underset{\neq 0}{a_m} \underset{\neq 0}{(z_k - z_0)^m} \underbrace{(1 + \overbrace{g(z_k - z_0)}^{\to 0})}_{\to 1 \text{ gdy } k \to \infty} \neq 0 \text{ dla dużych } k.$$

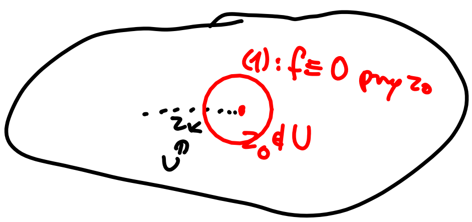
Zatem $f \equiv 0$ w otoczeniu z_0.

2) Niech

$$U = \{z \in \Omega \mid f \equiv 0 \text{ w pewnym kole wokół } z\}.$$

U jest otwarty.





$\Omega \setminus U$ jest otwarty: gdyby $U \ni z_k \to z_0 \in \Omega \setminus U$, to (z 1)) mielibyśmy $f \equiv 0$ w otoczeniu z_0, czyli $z_0 \in U$.

$$\underset{\text{spójny}}{\Omega} = \underset{\text{otwarte}}{U \cup (\Omega \setminus U)} \Rightarrow \underset{\ni z_0}{U} = \Omega, \quad \Omega \setminus U = \emptyset.$$

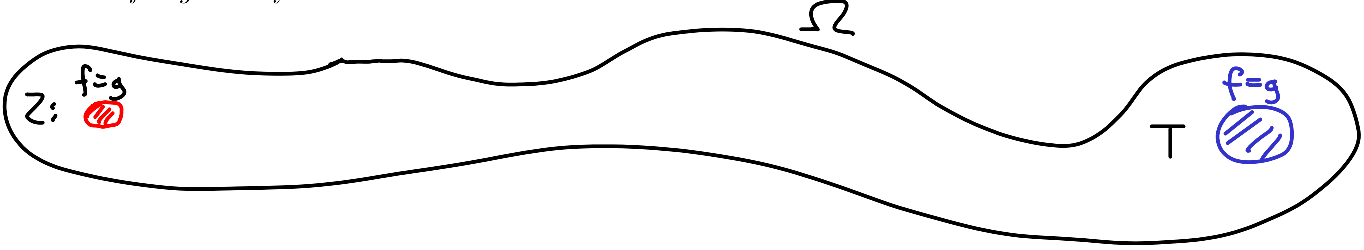
∎

Wniosek

stosujemy tw. do $f-g$

Niech Ω będzie obszarem, $f, g \in \mathcal{O}(\Omega)$. Jeśli

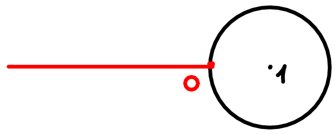
- $f = g$ w pewnym otwartym podzbiorze Ω;
  lub (ogólniej)
- $f = g$ na pewnym ciągu parami różnych punktów mającym granicę w Ω;
  to $f = g$ na całym obszarze Ω.



Przykład 1. Logarytm.

s) Dla $z \in B(1,1)$ określiliśmy "logarytm szeregowy":

$$\log_s(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(z-1)^n}{n}.$$



b) Dla $z \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_{\leq 0}$ określiliśmy "logarytm biegunowy":

$$\log_b(z) = \log(r) + it, \qquad z = re^{it}, -\pi < t < \pi.$$

c) Dla $z \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_{\leq 0}$ określiliśmy "logarytm całkowy":

$$\log_c(z) = \int_{\gamma_z} \frac{1}{z}\, dz, \qquad \text{gdzie } \gamma_z \text{ jest krzywą z 1 do } z \text{ w } \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_{\leq 0}.$$

Wiemy / łatwo sprawdzamy, że te funkcje są równe dla rzeczywistych $z \in [1, 2)$. Na mocy wniosku każde dwie z nich są równe (tam, gdzie są obie zdefiniowane).

Przykład 2.

$$\sin(z + w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$$

a) Znamy ten wzór dla $z, w \in \mathbf{R}$.

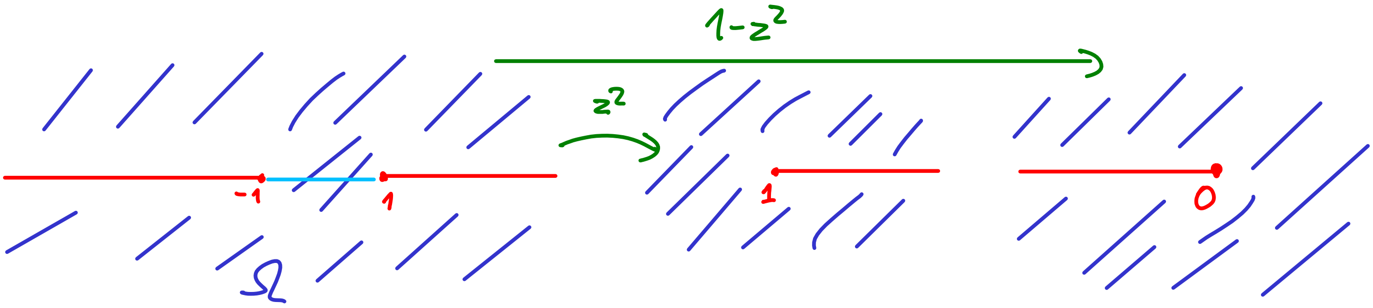
b) Ustalmy (dowolne) rzeczywiste z i potraktujmy lewą i prawą stronę jako holomorficzne funkcje $w \in \mathbf{C}$.
Te funkcje są równe na $\mathbf{R}$, więc i na $\mathbf{C}$.
To uzasadnia nasz wzór dla dowolnych $z \in \mathbf{R}$, $w \in \mathbf{C}$.

c) Ustalmy (dowolne) zespolone w i potraktujmy lewą i prawą stronę jako holomorficzne funkcje $z \in \mathbf{C}$.
Te funkcje są równe na $\mathbf{R}$, więc i na $\mathbf{C}$.
To uzasadnia nasz wzór dla dowolnych $z, w \in \mathbf{C}$.

Przykład 3.

$$\int_{[0,10+i]} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = ?$$

Niech $\Omega = \mathbf{C} \setminus ((-\infty,-1] \cup [1,\infty))$. Jest to obszar jednospójny.



a) Gdy $z \in \Omega$, $1 - z^2 \in \mathbf{C} \setminus (-\infty, 0]$. Zatem można sensownie określić funkcję $\log(1-z^2) \in \mathcal{O}(\Omega)$ – pokrywającą się z rzeczywistą funkcją $\log(1-x^2)$ na $(-1,1)$.

b) Definiujemy $\sqrt{1-z^2} = \exp(\frac{1}{2}\log(1-z^2))$ dla $z \in \Omega$. To określa $\sqrt{1-z^2} \in \mathcal{O}(\Omega)$, standardowe rzeczywiste na $(-1,1)$.

c) Niech $f(z) = \int_{[0,z]} \frac{dw}{\sqrt{1-w^2}}$ dla $z \in \Omega$. Wtedy $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Dla $z \in (-1,1)$ mamy $f(z) = \arcsin(z)$.

$$\underline{\sin(f(z))} = \underline{z}$$

funkcje holomorficzne w Ω
równe na $(-1,1)$
– więc równe w Ω.

$$\to \quad \sin\left(\int_{[0,10+i]} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}\right) = 10+i$$

→ Rozszerzyliśmy funkcję arcsin z $(-1,1)$ do $\Omega = \mathbb{C} \setminus ((-\infty,-1] \cup [1,\infty))$

Rysunek do Brouwera: