O SZEREGACH FOURIERA

1. Wielomiany i szeregi trygonometryczne.

Funkcję postaci

$$T(x) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx}$$

nazywamy *wielomianem trygonometrycznym*. Jak widać, wielomian trygonometryczny jest funkcją okresową o podstawowym okresie 2π i ma nieskończenie wiele pochodnych, które są także wielomianami trygonometrycznymi.

Bardzo ważnym ważnym przykładem jest funkcja

$$D_m(x) = \sum_{k=-m}^{m} e^{ikx} = 1 + 2\sum_{k=1}^{m} \cos kx = \frac{\sin(2m+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

zwana *jądrem Dirichleta*. Zauważmy, że

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_m(x)\,dx = 1.$$

Dysponując wielomianami trygonometrycznymi, możemy postawić zagadnienie *interpolacji trygonometrycznej*.

1.1. Lemat (interpolacja trygonometryczna). *Istnieje dokładnie jeden wielomian trygonometryczny T stopnia $\leqslant N$, taki że*

$$T\Big(\frac{2j\pi}{2N+1}\Big) = y_j, \qquad -N \leqslant j \leqslant N,$$

dla z góry zadanych liczb y_j.

Dowód. Niech $h = \frac{2\pi}{2N+1}$ oraz

$$T(x) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx}.$$

Aby wyznaczyć T trzeba tak dobrać współczynniki c_k, aby

$$y_j = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikjh}, \qquad -N \leqslant j \leqslant N. \tag{1.2}$$

Zauważmy teraz, że

$$\sum_{j=-N}^{N} y_j e^{-ik_0 jh} = \sum_{k=-N}^{N} c_k \sum_{j=-N}^{N} e^{i(k-k_0)jh} = \sum_{k=-N}^{N} c_k D_N((k-k_0)h),$$

gdzie

$$D_N(mh) = \begin{cases} \dfrac{\sin m\pi}{\sin \frac{m\pi}{2N+1}}, & m \neq 0, \\ 2N+1, & m = 0. \end{cases}$$

Dlatego

$$\frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{N} y_j e^{-ik_0 jh} = c_{k_0}.$$

$\square$

Niech teraz $f : [-\pi, \pi) \to \boldsymbol{C}$ będzie funkcją ciągłą. Istnieje wtedy dokładnie jeden wielomian trygonometryczny T stopnia $\leqslant N$ przyjmujący w punktach postaci $2j\pi/(2N+1)$ te same wartości co f. Współczynniki tego wielomianu wyrażają się wzorami

$$\begin{aligned} c_n(N) &= \frac{1}{2N+1} \sum_{j=-N}^{N} f\left(\frac{2\pi j}{2N+1}\right) e^{-in\frac{2\pi j}{2N+1}} \\ &= \frac{h}{2\pi} \sum_{j=-N}^{N} f(jh) e^{-injh} \end{aligned}$$

Prawa strona z dokładnością do wielkości dążącej do zera jest sumą całkową funkcji $f(x)e^{-inx}$ na odcinku $[-\pi, \pi]$ odpowiadającą podziałowi $P_N = \{jh\}_{j=-N}^{N} \cup \{-\pi, \pi\}$. Dlatego dla każdego $n \in \boldsymbol{N}$

$$\lim_{N\to\infty} c_n(N) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\, dx.$$

Z drugiej strony, na mocy (1.2)

$$f(jh) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikjh},$$

więc można się spodziewać, że

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}, \qquad |x| \leqslant \pi.$$

To pozwala nam sformułować podstwową ideę leżącą u podstaw teorii szeregow Fouriera. Przypuśćmy, że $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{C}$ jest funkcją okresową o okresie 2π i całkowalną w sensie Lebesgue'a na odcinkach domkniętych. Klasę takich funkcji będziemy oznaczać przez $L^1_{2\pi}(\boldsymbol{R})$. Dotychczasowe rozważania nasuwają myśl o przedstawieniu funkcji okresowych jako *szeregów trygonometrycznych*, to znaczy szeregów postaci

$$S(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx},$$

gdzie

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}\,dx \tag{1.3}$$

Widzimy, że sumy częściowe szeregu trygonometrycznego są wielomianami trygonometrycznymi. Tak zbudowany szereg trygonometryczny nazywa się *szeregiem Fouriera* funkcji f. Aby to zaznaczyć, piszemy

$$f \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)e^{inx}, \qquad \widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}\,dx.$$

Jak łatwo widać,

$$|\widehat{f}(n)| \leqslant \|f\|_1, \qquad n \in \boldsymbol{N}.$$

1.4. *Jeśli*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| < \infty,$$

to szereg trygonometryczny

$$S(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

jest zbieżny jednostajnie. Ponadto, dla każdego $n \in \boldsymbol{N}$

$$\widehat{S}(n) = c_n.$$

Dowód. Jednostajna zbieżność szeregu $S(x)$ wynika z kryterium Weierstrassa. Mamy bowiem

$$|c_n e^{inx}| \leqslant |c_n|.$$

Stąd też wzory na współczynniki otrzymujemy całkując jednostajnie zbieżny szereg $S(x)e^{-inx}$ wyraz po wyrazie. □

Pytania, jakie się nasuwają to:

1. Czy współczynniki Fouriera funkcji wyznaczają tę funkcję?
2. Czy szereg Fouriera funkcji $f \in L^p_{2\pi}(\boldsymbol{R})$ jest zbieżny do funkcji f w normie przestrzeni L^p ?
3. Czy szereg Fouriera funkcji $f \in L^p_{2\pi}(\boldsymbol{R})$ jest zbieżny do funkcji f prawie wszędzie?
4. Czy jeśli f jest ciągła, to jej szereg Fouriera jest zbieżny do niej w każdym punkcie? A może jednostajnie?
5. Może jeszcze inny rodzaj zbieżności jest naturalny dla funkcji z wymienionych klas?

Okażę się, że rozważając te pytania, trzeba będzie starannie rozróżnić przypadki L^1, L^2 oraz pozostałych L^p. Jeszcze inaczej trzeba będzie spojrzeć na zbieżność szeregów Fouriera funcji ciągłych. Odpowiedzi będą różne. Niektóre rozstrzygnięcia będą stosunkowo łatwe, inne będą zbyt głębokie, abyśmy je mogli rozważyć tutaj.

2. Historia

Na początku XIX wieku Fourier zadał fundamentalne pytanie: *Czy szereg Fouriera ciągłej funkcji jest zbieżny do niej punktowo?*

Wzmacniając nieco założenie ciągłości można bez większych trudności uzyskać odpowiedź twierdzącą. Tak jest na przyklad, gdy funkcja f jest różniczkowalna w sposób ciągły. Dirichlet, który to udowodnił, był przekonany, że tak powinno być w przypadku wszystkich funkcji ciągłych. Nietrudno też pokazać, że dla funkcji całkowalnych z kwadratem zbieżność zachodzi w sensie normy przestrzeni tych funkcji.

Po Dirichlecie także Riemann, Weierstrass i Dedekind opowiedzieli się za hipotezą zbieżności szeregu Fouriera funkcji ciągłych. To przekonanie obalił Paul du Bois-Reymond, który w roku 1876 pokazał, że *istnieje funkcja ciągła, której szereg Fouriera jest rozbieżny w przynajmniej jednym punkcie.*

Łuzin postawił w 1915 roku hipotezę, że *szereg Fouriera funkcji* $f \in L^2(\boldsymbol{T})$ *jest zbieżny prawie wszędzie.* Kolmogorow podał w roku 1923 *przykład funkcji* $f \in L^1(\boldsymbol{T})$*, której szereg Fouriera jest rozbieżny prawie wszędzie*, a w roku 1926 dokonał modyfikacji swojego przykładu, uzyskując szereg rozbieżny wszędzie. W tej sytuacji nie było jasne, czy poszukiwać pozytywnej, czy negatywnej odpowiedzi na hipotezę Łuzina.

Odpowiedzi udzielił Carleson roku 1966: *Tak, szereg Fouriera funkcji* $f \in L^2(\boldsymbol{T})$ *jest zbieżny prawie wszędzie do wartości funkcji.* W wywiadzie w roku 2007 Carleson ujawnił, że początkowo myślał, że ma metodę, która pozwoli mu wskazać przykład funkcji $f \in L^2(\boldsymbol{T})$, której szereg jest rozbieżny w przynajmniej jednym punkcie, ale ostatecznie zorientował się, że to się nie uda, co przekonało go do hipotezy Łuzina. Oryginalny dowód Carlesona jest bardzo trudny i chociaż kilku autorów (Mozzochi, Kahane, Joersbo & Mejbro, de Reyna, C. Fefferman, Lacey & Thiele) znalazło szereg uproszczeń, nadal nie ma łatwego dowodu.

W tym samym roku 1966 Katznelson pokazał, że dla każdego zbioru miary zero $E \subset \boldsymbol{T}$ istnieje funkcja ciągła, której szereg Fouriera jest rozbieżny przynajmniej w punktach tego zbioru. Stąd i z twierdzenia Carlesona można wywnioskować, że *zbiór* $E \subset \boldsymbol{T}$ *może być zbiorem rozbieżności szeregu Fouriera funkcji ciągłej, wtedy i tylko wtedy gdy jest miary zero.*

Carleson uważał, że rozszerzenie jego twierdzenia na funkcje $f \in L^p(\boldsymbol{T})$ jest raczej oczywiste. Zrobił to Hunt w roku 1968. Zbieżność szeregu Fouriera funkcji $f \in L^p(\boldsymbol{T})$ w normie tej przestrzeni jest sprawą znacznie łatwiejszą, ale z pewnością nie tak prostą, jak przypadek $p = 2$.

Zaczerpnięte z *http:en.wikipedia.orgwikiCarleson%27s_theorem*

3. Splot i jedność aproksymatywna

Przestrzeń $L^1_{2\pi}(\boldsymbol{R})$ wygodnie bedzie utożsamić z pewną przestrzenią $L^1(\boldsymbol{T})$, gdzie $\boldsymbol{T}$ jest zwartą grupą abelową z miarą. Niech $\boldsymbol{T} = G/\boldsymbol{R}$. Jak wiemy, $\boldsymbol{T}$ można utożsamić ze zbiorem $[-\pi, \pi)$ z działaniem

$$t \oplus s = t + s \mod (2\pi),$$

gdzie prawa strona oznacza tę z liczb $t + s + 2k\pi$, która leży w przedziale $[-\pi, \pi)$. Będziemy to działanie oznaczać po prostu jako $t + s$, co nie powinno prowadzić do nieporozumień. Na $\boldsymbol{T}$ będziemy rozważać topologię ilorazową, której odpowiada metryka

$$d(x, y) = \min_k |x - y - 2k\pi|.$$

Przestrzeń topologiczna $\boldsymbol{T}$ jest zwarta. Miarą na $\boldsymbol{T}$ będzie miara Lebesgue'a. Miara ta jest niezmiennicza na przesunięcia w grupie, tak że

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\boldsymbol{T}} f(x + t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\boldsymbol{T}} f(t)\, dt.$$

Odwzorowanie

$$L^1_{2\pi}(\boldsymbol{R}) \ni f \mapsto g = f|\,[-\pi, \pi) \in L^1(\boldsymbol{T})$$

ustala izometrię przestrzeni Banacha $L^1_{2\pi}(\boldsymbol{R})$ i $L^1(\boldsymbol{T})$.

Przypomnijmy twierdzenie Fubiniego.

3.1. Twierdzenie (Fubini). *Niech dx oznacza miarę Lebesgue'a na $\boldsymbol{R}^n$, dy miarę Lebesgue'a na $\boldsymbol{R}^m$, a $d(x, y)$ miarę Lebesgue'a na $\boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^m$. Niech f będzie funkcją całkowalną względem miary Lebesgue'a na $\boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^m$. Wtedy dla prawie każdego $x \in \boldsymbol{R}^n$ funkcja*

$$\boldsymbol{R}^m \ni y \mapsto f(x, y)$$

jest całkowalna na $\boldsymbol{R}^m$ i funkcja

$$x \mapsto \int_{\boldsymbol{R}^m} f(x, y)\, dy$$

jest całkowalna na $\boldsymbol{R}^n$. Co więcej,

$$\int_{\boldsymbol{R}^n} \left(\int_{\boldsymbol{R}^m} f(x, y)\, dy \right) dx = \int f(x, y)\, d(x, y).$$

Warto też pamiętać o następującym kryterium całkowalności:

3.2. Twierdzenie (Tonelli). *Niech będzie dana funkcja mierzalna na $\boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^m$. Jeśli*

$$\int_{\boldsymbol{R}^n} \int_{\boldsymbol{R}^m} |f(x, y)|\, dy\, dx < \infty,$$

to funkcja f jest calkowalna na $\boldsymbol{R}^m \times \boldsymbol{R}^n$.

Splot funkcji $f, g \in L^1(\boldsymbol{T})$ definiujemy wzorem

$$f \star g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\boldsymbol{T}} f(x-y)g(y)\, dy.$$

Aby uzasadnić poprawność definicji czynimy następujące spostrzeżenie: Jest

$$\int_{\boldsymbol{T}} \int_{\boldsymbol{T}} |f(x-y)g(y)|\, dx\, dy = \|f\|_1 \|g\|_1 < \infty,$$

więc funkcja dwóch zmiennych $(x,y) \mapsto f(x-y)g(y)$ jest całkowalna na $\boldsymbol{T} \times \boldsymbol{T}$. Z twierdzenia Fubiniego wynika więc, że splot jest dobrze zdefiniowany dla p.w. $x \in \boldsymbol{T}$.

3.3. *Jeśli* $f, g \in L^1(\boldsymbol{T})$, *to* $f \star g \in L^1(\boldsymbol{T})$ *oraz*

$$\|f \star g\|_1 \leqslant \|f\|_1 \|g\|_1.$$

3.4. *Jeśli* $f \in L^1(\boldsymbol{T})$, $g \in C(\boldsymbol{T})$, *to* $f \star g \in C(\boldsymbol{T})$ *oraz*

$$\|f \star g\|_\infty \leqslant \|f\|_1 \|g\|_\infty.$$

Z twierdzenia Fubiniego wynika następujący wniosek o różniczkowaniu pod znakiem całki. Podany niżej prosty dowód zawdzięczam p. Tomaszowi Rzepeckiemu.

3.5. *Niech* $m \in L^1(\boldsymbol{T})$. *Niech* $F : \boldsymbol{T} \times (a,b) \to \boldsymbol{C}$ *będzie taką funkcją, że dla każdego* $x \in (a,b)$ *funkcja* $t \mapsto F(t,x)$ *jest całkowalna, a dla prawie każdego* t *funkcja* $x \to F(t,x)$ *jest różniczkowalna oraz*

$$|\partial_x F(t,x)| \leqslant g(t), \qquad g \in L^1(\boldsymbol{T}).$$

Wtedy funkcja

$$f(x) = \int_{\boldsymbol{T}} F(t,x)\, dt$$

jest różniczkowalna i

$$f'(x) = \int_{\boldsymbol{T}} \partial_x F(t,x)\, dt.$$

Dowód. Ustalmy $x \in (a,b)$. Dla małych $h \neq 0$ niech

$$F_h(t) = \frac{F(t,x+h) - F(t,x)}{h}, \qquad t \in \boldsymbol{T}.$$

Funkcje F_h mają całkowalną majorantę, bo

$$|F_h(t)| \leqslant |\partial_x F(t, x+\theta h)| \leqslant g(t),$$

a ponadto $F_h(t) \to \partial_x F(t,x)$ dla p.w. $t \in \boldsymbol{T}$, więc na mocy twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności ograniczonej

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \int_{\boldsymbol{T}} \lim_{h \to 0} F_h(t)\, dt = \int_{\boldsymbol{T}} \partial_x F(t,x)\, dt.$$

$\square$

Korzystając z (3.5) dowodzi się, że

3.6. *Jeśli* $f \in L^1(\boldsymbol{T})$ *i* $g \in C^1(\boldsymbol{T})$, *to* $f \star g \in C^1(\mathfrak{g})$ *i*

$$(f \star g)'(x) = f' \star g(x), \qquad x \in \boldsymbol{T}.$$

Dowód. Rzeczywiście, mamy

$$f \star g(x) = \int_{\boldsymbol{T}} g(x-t) f(t)\, dt,$$

gdzie, jak widać, spełnione są założenia twierdzenia o różniczkowaniu całki.

□

3.7. *Zadanie.* Jeśli $F \geqslant 0$ jest mierzalna na $\boldsymbol{T}^2$ i $1 \leqslant p < \infty$, to

$$\left(\int_{\boldsymbol{T}} \left(\int_{\boldsymbol{T}} F(x,y)\, dy\right)^p dx\right)^{1/p} \leqslant \int_{\boldsymbol{T}} \left(\int_{\boldsymbol{T}} F(x,y)^p\, dy\right)^{1/p} dx.$$

3.8. *Jeśli* $f \in L^1(\boldsymbol{T})$, $g \in L^p(\boldsymbol{T})$, *to* $f \star g \in L^p(\boldsymbol{T})$ *oraz*

$$\|f \star g\|_p \leqslant \|f\|_1 \|g\|_p.$$

3.9. Definicja. Ciąg funkcji $\varphi_n \in L^1(\boldsymbol{T})$ nazywamy *jednością aproksymatywną*, jeśli

(a) $\frac{1}{2\pi} \int_{\boldsymbol{T}} \varphi_n(x)\, dx = 1$,

(b) $\int_{\boldsymbol{T}} |\varphi_n(x)|\, dx \leqslant M$,

(c) $\lim_n \int_{\delta \leqslant |x| \leqslant \pi} \varphi_n(x)|\, dx = 0$ dla $0 < \delta < \pi$.

3.10. Przykład. Niech

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \dfrac{2n}{\pi}(\pi - |nx|), & |x| < \frac{\pi}{n}, \\ 0, & |x| \geqslant \frac{\pi}{n}. \end{cases}$$

3.11. *Zadanie.* Skonstruuj jedność aproksymatywną, taką że $\varphi_n \in C^\infty(\boldsymbol{T})$.

3.12. *Zadanie.* Niech $f_x(t) = f(t+x)$ dla $t \in \boldsymbol{T}$. Czy prawdą jest, że dla każdej funkcji $f \in L^1(\boldsymbol{T})$

$$\lim_{x \to 0} f(t+x) = f(t)$$

dla p. w. $t \in \boldsymbol{T}$?

3.13. Lemat. *Dla każdej funkcji* $f \in L^1(\boldsymbol{T})$ *i każdego* $\varepsilon > 0$ *istnieje funkcja prosta*

$$g = \sum_k c_k \chi_{A_k}, \qquad A_k = [a_k, b_k),$$

taka że $\|f - g\|_1 < \varepsilon$.

Dowód. Wystarczy zauważyć, że dla każdego zbioru mierzalnego $E \subset \boldsymbol{T}$ i każdego $\varepsilon > 0$ istnieje skończona rodzina przedziałów A_k, taka że $|E \Delta \bigcup_k A_k| < \varepsilon$. Rzeczywiście, niech

$$E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} |A_k| < \varepsilon/2.$$

Niech $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, $A_N = \bigcup_{k=1}^{N} A_k$. Wtedy dla dostatecznie dużego N

$$|E \Delta A_N| \leqslant |A \setminus E| + |A \setminus A_N| < \varepsilon/2 + \sum_{k=N+1}^{\infty} |A_k| < \varepsilon.$$

□

3.14. Lemat (Riemann-Lebesgue). *Jeśli* $f \in L^1(\boldsymbol{T})$, *to*

$$\lim_{|n| \to \infty} \widehat{f}(n) = 0.$$

Dowód. Wykorzystamy tożsamość

$$\widehat{f}(n) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\boldsymbol{T}} f(x) e^{-in(x-\pi/n)}\, dx,$$

dzięki której

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{4\pi} \int_{\boldsymbol{T}} \Big(f(x) - f(x+\pi/n) \Big)\, dx.$$

Dlatego

$$|\widehat{f}(n)| \leqslant \frac{1}{2} \|f - f_{\pi/n}\|_1 \to 0, \qquad |n| \to \infty.$$

□

3.15. Wniosek. *Dla każdego* $f \in L^(\boldsymbol{T})$ *i każdego* $0 < \delta < \pi$

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\delta \leqslant |x| \leqslant \pi} f(x) D_n(x)\, dx = 0.$$

Dowód. Rzeczywiście,

$$\int_{\delta \leqslant |x| \leqslant \pi} f(x) D_n(x)\, dx = \int_{\delta/2 \leqslant |x| \leqslant \pi/2} F(x) \sin(2n+1)x\, dx,$$

gdzie

$$F(x) = \frac{f(x)}{\sin x} \chi_{[\delta/2, \pi/2)}(x)$$

jest funkcją całkowalną. □

3.16. Twierdzenie. *Jeśli* $f \in L^1(\boldsymbol{T})$ *spełnia w punkcie* $a \in \boldsymbol{T}$ *warunek*

$$|f(x) - f(a)| \leqslant C|x-a|^{\alpha}, \qquad x \in \boldsymbol{T},$$

dla pewnych $C > 0$ *i* $\alpha > 0$, *to szereg Fouriera* f *jest zbieżny w tym punkcie do* $f(a)$.

Dowód. Niech $\varepsilon > 0$. Mamy

$$S_n(f)(a) - f(a) = D_n \star f(a) - f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{|x| \leqslant \delta} \Big(f(a-x) - f(a) \Big) D_n(x)\, dx$$
$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{|x| \leqslant \delta} \Big(f(a-x) - f(a) \Big) D_n(x)\, dx,$$

gdzie na mocy Wniosku 3.15 druga całka dąży do zera, gdy $n \to \infty$. Ponadto

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_{|x|\leqslant\delta}\Big(f(a-x)-f(a)\Big)D_n(x)\,dx\right| \leqslant \frac{C\delta}{2\pi}\int_{|x|\leqslant\delta}\frac{|x|^\alpha}{\sin x/2}\,dx < \varepsilon,$$

gdy δ jest dostatecznie mała. □

3.17. Wniosek. *Jeśli $f \in L^1(\boldsymbol{T})$ jest w punkcie $a \in \boldsymbol{T}$ lipschitzowska (a więc na przykład różniczkowalna), to szereg Fouriera f jest zbieżny w tym punkcie do $f(a)$.*

3.18. Wniosek (zasada lokalizacji). *Jeśli $f, g \in L^1(\boldsymbol{T})$ i $f(x) = g(x)$ w otoczeniu $|x-a| < \delta$, to*

$$\lim_{n\to\infty} |S_n(f)(a) - S_n(g)(a)| = 0.$$

3.19. Twierdzenie. *Niech $f \in L^1(\boldsymbol{T})$. Wtedy*

$$\lim_{x\to 0} \|f_x - f\|_1 = 0.$$

Dla zadanego $\varepsilon > 0$ i niech $g = \sum_{k+1}^N c_k\chi_{A_k}$, gdzie A_k są przedziałami, będzie funkcją prostą, taką że $\|f-g\|_1 < \varepsilon/3$. Jak łatwo zauważyć,

$$\|(\chi_{A_k})_x - \chi_{A_k}\|_1 \leqslant 2|x|,$$

więc

$$\|g - g_x\|_1 \leqslant 2\sum_{k=1}^N |c_k||x| = C|x|.$$

Ostatecznie,

$$\begin{aligned}\|f - f_x\|_1 &\leqslant \|f-g\|_1 + \|g-g_x\|_1 + \|g_x - f_x\|_1 \\ &= 2\|f-g\|_1 + \|g-g_x\|_1 < \frac{2\varepsilon}{3} + C|x| < \varepsilon\end{aligned}$$

dla $x| < C/3$.

3.20. Twierdzenie. *Niech φ_n będzie jednością aproksymatywną. Wtedy dla każdej funkcji $f \in L^1(\boldsymbol{T})$*

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n \star f - f\|_1 = 0.$$

Podobnie dla każdej funkcji $f \in C(\boldsymbol{T})$

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n \star f - f\|_\infty = 0.$$

Dowód. Niech $\varepsilon > 0$. Istnieje $\delta > 0$, taka że $\|f_y - f\|_1 < \varepsilon$, jeśli $|y| < \delta$. Wobec tego

$$\begin{aligned}|\varphi_n \star f(x) - f(x)| &\leqslant \int_{\boldsymbol{T}} |f(x-y) - f(x)||\varphi_n(y)|\,dy \\ &= \int_{|y|<\delta} |f(x-y)-f(x)||\varphi_n(y)|\,dy + \int_{\delta\leqslant|y|\leqslant\pi} |f(x-y) - f(2)||\varphi_n(y)|\,dy,\end{aligned}$$

a stąd po scałkowaniu względem x i wykorzystaniu twierdzenia Fubiniego

$$\begin{aligned}\|\varphi_n \star f - f\|_1 &\leqslant \int_{|y|<\delta} \|f_{-y} - f\|_1 |\varphi_n(y)|\, dy + 2\|f\|_1 \int_{\delta<|y|\leqslant\pi} |\varphi_n(y)|\, dy \\ &\leqslant M\varepsilon + 2\|f\|_1 \int_{\delta<|y|\leqslant\pi} |\varphi_n(y)|\, dy < 2M\varepsilon\end{aligned}$$

dla dostatecznie dużych n. □

3.21. Wniosek. *Ciągłe funkcje leżą gęsto w* $L^1(\boldsymbol{T})$.

4. Jądra Dirichleta i Fejéra

Przypomnijmy, że jądro Dirichleta, to wielomian trygonometryczny

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} = \frac{\sin(2n+1)x/2}{\sin x/2},$$

a suma częściowa szeregu Fouriera funkcji $f \in L^1(\boldsymbol{T})$ to

$$S_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) e^{ikx}.$$

4.1. Lemat. *Dla każdej funkcji* $f \in L^1(\boldsymbol{T})$

$$S_n(f)(x) = D_n \star f(x).$$

Średnią sumą Cesaro szeregu Fouriera funkcji $f \in L^1(\boldsymbol{T})$ nazywamy

$$\sigma_n(f)(x) = \frac{S_0(f)(x) + \cdots + S_n(f)(x)}{n+1}.$$

4.2. Wniosek. *Dla każdej funkcji* $f \in L^1(\boldsymbol{T})$

$$\sigma_n(f)(x) = K_n \star f(x),$$

gdzie

$$K_n(x) = \frac{D_0(x) + \cdots + D_n(x)}{n+1}.$$

Wielomian trygonometryczny $K_n(x)$ nazywamy *jądrem Fejéra.*

4.3. *Dla każdego* $n \in \boldsymbol{N}$

$$K_n(x) = \frac{\sin^2(n+1)x/2}{(n+1)\sin^2 x/2}.$$

Dowód. Mamy

$$\begin{aligned}(n+1)\sin^2 x/2 K_n(x) &= (n+1)\sin^2 x/2 \sum_{k=-n}^{n} D_k(x) \\ &= (n+1)\sin^2 x/2 \sum_{k=0}^{n} \sin(2n+1)x/2 = 1/2 \sum_{k=0}^{n} \cos kx - \cos(k+1)x \\ &= 1/2\big(1 - \cos(n+1)x\big) = \sin^2(n+1)x/2.\end{aligned}$$

□

4.4. Twierdzenie. *Jądro Fejéra K_n jest jednością aproksymatywną.*

4.5. Wniosek. *Dla każdej funkcji $f \in L^1(\boldsymbol{T})$*

$$\|\sigma_n(f) - f\|_1 \to 0, \qquad n \to \infty.$$

4.6. Wniosek. *Niech $f, g \in L^1(\boldsymbol{T})$. Jeśli dla każdego $n \in \boldsymbol{Z}$*

$$\widehat{f}(n) = \widehat{g}(n),$$

to $f = g$ prawie wszędzie.

4.7. Wniosek. *Dla każdej funkcji $f \in C(\boldsymbol{T})$*

$$\|\sigma_n(f) - f\|_\infty \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Pozwolimy sobie traz na dygresję, aby wskazać na ważny związek między całką Dirichleta i całką Hilberta.

4.8. *Dla każdych $0 \leqslant a < b < \pi$*

$$\int_a^b D_n(t)\,dt = \int_{A_n}^{B_n} \frac{\sin t}{t}\,dt + \varepsilon_n,$$

gdzie $A_n = (n + \frac{1}{2})\,a$, $B_n = (n + \frac{1}{2})\,b$ i $\varepsilon_n \to 0$. Wobec tego

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b D_n(t)\,dt = 0, \qquad 0 < a < b < \pi.$$

Dowód. Rzeczywiście,

$$\begin{aligned}\int_a^b D_n(t)\,dt &= 2\int_{a/2}^{b/2} D_n(2t)\,dt \\ &= \int_{a/2}^{b/2} \frac{\sin(2n+1)t}{t}\,dt + \int_{a/2}^{b/2} f(t)\sin(2n+1)t\,dt,\end{aligned}$$

gdzie

$$f(t) = \frac{1}{t\sin t} - \frac{1}{t^2} = \frac{t - \sin t}{t^2 \sin t} = -\frac{r_3(t)}{t^2\sin t}, \qquad |r_3(t)| \leqslant c|t|^3,$$

jest funkcją całkowalną. Po zamianie zmiennej

$$\int_a^b D_n(t)\,dt = \int_{A_n}^{B_n} \frac{\sin t}{t}\,dt + \varepsilon_n,$$

gdzie $\varepsilon_n \to 0$ na mocy lematu Riemanna-Lebesgue'a. □

4.9. Przykład. Zauważmy, że dla $a = 0$, $bn = \pi$ mamy

$$\pi = \int_0^\pi D_n(t)\,dt = 2\int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt + \varepsilon_n,$$

więc

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}.$$

Obliczyliśmy wartość całki Hilberta.

5. Rozbieżność szeregu Fouriera funkcji ciągłej

Zacznijmy od prostych spostrzeżeń.

5.1. *Jeśli* $f, g \in L^1(\boldsymbol{T})$, *to* $\widehat{f \star g}(n) = \widehat{f}(n)\widehat{g}(n)$.

5.2. *Niech* K_n *będzie jądrem Fejéra. Mamy*

$$K_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) e^{ikx}.$$

5.3. *Jeśli* φ *jest wielomianem trygonometrycznym stopnia* $\leqslant n$, *to*

$$|K_{n^2} \star \varphi(x) - \varphi(x)| < \left(1 + \frac{1}{n}\right) \|\varphi\|_1.$$

A oto ważna własność jądra Dirichleta. Liczby L_n zdefiniowane poniżej nazywamy *stałymi Lebesgue'a*.

5.4. Stwierdzenie. *Dla każdego* n.

$$L_n = \frac{1}{2\pi} \int_{\boldsymbol{T}} |D_n(x)| \, dx \geqslant \frac{4}{\pi^2} \log(n-1).$$

Dowód. Mamy

$$L_n \geqslant \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{|\sin(2n+1)x|}{x} \, dx \geqslant \frac{2}{\pi} \int_0^{n\pi} \frac{|\sin y|}{y} \, dy,$$

a więc

$$L_n \geqslant \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} \, dx \geqslant \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k\pi} \geqslant \frac{4}{\pi^2} \log(n-1).$$

□

5.5. Wniosek. *Istnieje ciąg funkcji ciągłych* ψ_n, *takich że* $\|\psi_n\|_\infty \leqslant 1$, *oraz liczba* $q > 2/5$,*taka że*

$$|S_n(\psi_n)(0)| > q \log n,$$

dla dostatecznie dużych n.

Dowód. Jądro Dirichleta D_n ma $2n+1$ miejsc zerowych a_k w przedzaliale $[-\pi, \pi)$. Niech $a_k \in I_k$, gdzie I_k są otwartymi przedziałami parami rozłącznymi i takimi że

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{2n+1} \int_{I_k} |D_n(x)| \, dx \leqslant 1, \qquad \sum_{k=1}^{2n+1} |I_k| \leqslant 1.$$

Zdefiniujmy $\psi_n(x) = \operatorname{sgn} D_n(x)$ dla $x \notin A_n = \bigcup_k I_k$ i przedłużmy liniowo na cały odcinek $[-\pi, \pi)$. Wtedy

$$S_n(\psi)(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\boldsymbol{T}} D_n(x) \varphi_n(x) \, dx \geqslant \frac{1}{2\pi} \int_{\boldsymbol{T}} |D_n(x)| \, dx - 2 > q \log n,$$

gdzie $2/5 < q < 4/\pi^2$.

□

5.6. Wniosek. *Istnieje ciąg wielomianów trygonometrycznych φ_n stopnia $\leqslant n^2$, takich że $\|\varphi_n|_\infty \leqslant 1$ oraz*

$$S_n(\varphi_n)(0) \geqslant \frac{2}{5}\log n.$$

dla dostatecznie dużych n.

Dowód. Niech ψ_n będą jak we Wniosku 5.5 i niech

$$\varphi_n(x) = K_{n^2} \star \psi_n(x).$$

Na mocy (5.3) i Wniosku 5.5

$$\begin{aligned}|S_n(\varphi_n)(0)| = |D_n \star K_{n^2} \star \psi_n(0)| &\geqslant |S_n(\psi_n)(0)| - |K_{n^2} \star D_n\varphi_n - D_n \star \varphi_n(x)| \\ &> q\log n - 2 > \frac{2}{5}\log n\end{aligned}$$

dla dostatecznie dużych n. □

5.7. Twierdzenie. *Istnieje funkcja ciągła $f \in C(\boldsymbol{T})$, taka że*

$$\limsup_n |S_n(f)(0)| = \infty.$$

Dowód. Niech $\lambda_n = 2^{3^n}$. Zauważmy, że

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n^3 > \lambda_n^2.$$

Niech

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} f_n(x), \qquad x \in \boldsymbol{T},$$

gdzie $f_n(x) = \varphi_{\lambda_n}(\lambda_n x)$, a wielomiany trygonometryczne φ_k są jak we Wniosku 5.6. Szereg definiujący f jest jednostajnie zbieżny, więc f jest ciągła. Pokażemy teraz, że pewien podciąg ciągu sum częściowych szeregu Fouriera f dąży do nieskończoności. Najpierw jednak zwróćmy uwagę, że

$$f_n(x) = \sum_{|k|\leqslant\lambda_n^2} \widehat{\varphi}_{\lambda_n}(n)e^{i\lambda_n kx},$$

a więc f_n jest wielomianem trygonometrycznym stopnia $\leqslant \lambda_n^3$.

Funkcję f przedstawiamy jako

$$f = \sum_{n=1}^{N-1} 2^{-n} f_n + 2^{-N} f_N + \sum_{k=N+1}^{\infty} 2^{-n} f_n = F_1(x) + F_2(x) + F_3(x).$$

Mamy

$$S_{\lambda_N^2}(F_1)(0) = F_1(0) = \sum_{n=1}^{N-1} 2^{-n},$$

bo F_1 jest wielomianem trygonometrycznym stopnia $\leqslant \lambda_{N-1}^3 < \lambda_N^2$. Z kolei na mocy Wniosku 5.6

$$|S_{\lambda_N^2}(F_2)(0)| = 2^{-N}|S_{\lambda_N}(\varphi_{\lambda_N})(0)| \geqslant 2^{-N}\log\lambda_N = \left(\frac{3}{2}\right)^N,$$

bo

$$g_N(x) = \sum_{|k| \leqslant \lambda_N^2} c_k e^{ik\lambda_N x}, \qquad \varphi_{\lambda_N}(x) = \sum_{|k| \leqslant \lambda_N^2} c_k e^{ikx}$$

i w związku z tym

$$S_{\lambda^2}(f_N)(0) = S_\lambda(\varphi_{\lambda_N})(0)$$

Wreszcie, wszystkie wykładniki charakterystyczne φ_{λ_n} dla $n \geqslant N+1$ z wyjątkiem zerowych są większe od λ_N^2, więc

$$|S_{\lambda_N^2}(F_3)(0)| \leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n} |\widehat{\varphi}_{\lambda_n}(0)| \leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n}.$$

Zbierając razem trzy powyższe oszacowania, otrzymujemy

$$|S_{\lambda_N^2}(f)(0)| \geqslant \frac{2}{5}\left(\frac{3}{2}\right)^N - 1.$$

$\square$