1. Miara i całka Lebesgue'a na $\boldsymbol{R}^d$

1. Miara.

Mówimy, że rodzina podzbiorów $\mathcal{S}$ zbioru Ω jest σ-ciałem, jeśli wraz z każdym zbiorem zawiera ona jego dopełnienie i jest zamknięta na sumowanie przeliczalnych podrodzin. Funkcję zbioru

$$\varphi : \mathcal{S} \to [0, \infty],$$

która jest przeliczalnie addytywna, tzn. spełnia warunek

$$\varphi\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(A_k), \tag{1.1}$$

jeśli $A_k \in \mathcal{S}$ są parami rozłączne, nazywamy *miarą* na σ-ciele $\mathcal{S}$.

Zaczniemy od pewnych ogólnych własności miary φ na σ-ciele $\mathcal{S}$.

1.2. *Jeśli $E_k \in \mathcal{S}$ jest wstępującym ciągiem zbiorów, to*

$$\varphi\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\Big) = \lim_{k\to\infty} \varphi(E_k).$$

Dowód. Niech $A_1 = E_1$ oraz $A_n = E_n \setminus E_{n-1}$ dla $n \geqslant 2$. Łatwo zauważyć, że zbiory A_n są parami rozłączne i

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Zatem

$$\varphi\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\Big) = \varphi\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n) = \lim_{k\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \varphi(A_n)$$
$$= \lim_{k\to\infty} \varphi\Big(\bigcup_{n=1}^{k} A_n\Big) = \lim_{k\to\infty} \varphi(E_k).$$

□

1.3. *Jeśli $E_k \in \mathcal{S}$ jest zstępującym ciągiem zbiorów skończonej miary, to*

$$\varphi\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\Big) = \lim_{k\to\infty} \varphi(E_k).$$

Dowód. Niech $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$ i niech $A_k = E_k \setminus E_{k+1}$ dla $k \geqslant 1$. Łatwo zauważyć, że zbiory A_k są parami rozłączne i

$$E_n = E \cup \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k,$$

Zatem

$$\varphi(E_n) = \varphi(E) + \sum_{k=n}^{\infty} \varphi(A_k),$$

gdzie drugi wyraz sumy dąży do zera, bo jest resztą zbieżnego szeregu

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi(A_k) \leqslant \varphi(E_1).$$

$\square$

Nietrudno zauważyć, że przekrój dowolnej ilości σ-ciał jest też σ-ciałem. Dlatego dla każdej rodziny zbiorów $\mathcal{A} \subset 2^{\Omega}$ można mówić o najmniejszym σ-ciele zawierającym $\mathcal{A}$.

Funkcję zbioru

$$\varphi^\star : 2^\Omega \to [0, \infty],$$

która jest przeliczalnie podaddytywna, tzn. spełnia warunek

$$\varphi^\star\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \varphi^\star(A_k), \tag{1.4}$$

jeśli $A_k \subset \Omega$, nazywamy *miarą zewnętrzną* na Ω. Pojęcie miary zewnętrznej wystąpi w dowodzie naszego podstawowego twierdzenie.

2. Półpierścień przedziałów

Zbiory postaci

$$A = \prod_{k=1}^{n} [a_k, b_k) \tag{2.1}$$

będziemy nazywali przedziałami (półotwartymi) w $\boldsymbol{R}^n$, a rodzinę wszystkich takich przedziałow oznaczymy przez $\mathcal{P}$. Liczbę

$$|A| = \prod_{k=1}^{n} (b_k - a_k)$$

nazwiemy objętością przedziału.

2.2. *Jeśli A i B są przedziałami, to $A \cap B$ jest także przedziałem, natomiast $A \setminus B$ jest sumą nie więcej niż $2n$ rozłącznych przedziałów.*

Rozbiciem przedziału A będziemy nazywali rodzinę parami rozłącznych podprzedziałów $\pi = \{A_k\}$, taką że $A = \bigcup_k A_k$.

2.3. *Dla każdej pary rozłącznych przedziałów A_1, A_2 istnieje rozdzielająca je hiperpłaszczyzna.*

Dowód. Istnieje oś, powiedzmy o numerze j, taka że rzuty A_1 i A_2 są rozłączne. Zatem dla pewnej liczby

$$A_1 \subset \{x \in A : x_j < c\},\ A_2 \subset \{x \in A : x_j \geqslant c\}.$$

$\square$

2.4. *Jeśli $\{A_k\}$ jest rozbiciem $A \in \mathcal{P}$, to ,*

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} |A_k|.$$

Dowód. Niech

$$A = \bigcup_{k-1}^{N} A_k \subset \boldsymbol{R}^n,$$

gdzie suma jest rozłączna i A_k są niepuste. Przeprowadzimy indukcję ze względu na N. Jeśli $N = 1$, to nie ma czego dowodzić. Gdy $N \geqslant 2$, korzystając z (2.3), widzimy, że istnieje hiperpłaszczyzna $x_j = c$, taka że

$$A = B \cup C, \qquad B = \{x \in A : x_j < c\},\ C = \{x \in A : x_j \geqslant c\},$$

a ponadto $A_1 \subset B$, $A_N \subset C$. Mamy więc

$$B = \bigcup_{k=1}^{N-1} B \cap A_k, \qquad C = \bigcup_{k=2}^{N} C \cap A_k.$$

Zatem, jeśli twierdzenie jest prawdziwe dla rozbić co najwyżej $N-1$-elementowych (założenie indukcyjne), to

$$|A| = |B| + |C| = \sum_{k=1}^{N} |B \cap A_k| + |C \cap A_k| = \sum_{k=1}^{N} |A_k|.$$

□

2.5. Lemat. *Jeśli $P \in \mathcal{P}$ i*

$$P \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k, \qquad I_k \in \mathcal{P},$$

to

$$|P| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |I_k|.$$

Dowód. Niech $\varepsilon > 0$. Dla każdego k niech $A_k \in \mathcal{P}$ będzie takie, że $I_k \subset A_k^o$ i $|A_k| \leqslant \varepsilon/2^k$. Niech ponadto Q będzie przedziałem, takim że $\overline{Q} \subset P$ i $|P| \leqslant |Q| + \varepsilon$. Wtedy

$$\overline{Q} \subset \bigcup_k A_k^o,$$

a więc na mocy zwartości $\overline{Q}$ istnieje N, takie że

$$Q \subset \bigcup_{k=1}^{N} A_k,$$

skąd

$$|P| \leqslant |Q| + \varepsilon \leqslant \sum_{k=1}^{N} |A_k| + 2\varepsilon \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |I_k| + 2\varepsilon.$$

Wobec dowolności ε, otrzymujemy tezę. □

2.6. Wniosek. *Jeśli $P \in \mathcal{P}$ i*

$$P = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k, \qquad I_k \in \mathcal{P},$$

gdzie przedziały I_k są parami rozłączne, to

$$|P| = \sum_{k=1}^{\infty} |I_k|.$$

Dowód. Wiemy już, że

$$|P| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |I_k|.$$

Z drugiej strony każda skończona suma $\bigcup_{k=1}^{N} I_k$ ma dopełnienie w P składające się ze skończonej liczby przedziałów A_j, więc

$$\sum_{k=1}^{N} |I_k| \leqslant \sum_{k=1}^{N} |I_k| + \sum_{j=1}^{M} |A_j| = |P|,$$

co wobec dowolności N daje

$$\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| \leqslant |P|.$$

□

3. Konstrukcja miary Lebesgue'a

3.1. Twierdzenie. *Istnieje dokładnie jedna miara borelowska μ, taka że*

$$\mu(I) = |I|. \tag{3.2}$$

dla każdego przedziału $I \in \mathcal{P}$.

I. Dowód przeprowadzimy w kilku krokach. Najpierw zdefiniujemy miarę zewnętrzną

$$\mu^\star(E) = \inf\{\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| : E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\},$$

gdzie $I_k \in \mathcal{P}$. Zdefiniowana funkcja $\mu^\star$ jest funkcją zbioru

$$\mu^\star : 2^{\boldsymbol{R}^d} \to [0, \infty]$$

i ma następujące własności

1) $\mu^\star\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\Big) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu^\star(E_k)$ dla dowolnych $E_k \subset \boldsymbol{R}^d$,
2) $\mu^\star(I) = |I|$ dla każdego $I \in \mathcal{P}$.

Własność pierwsza wynika wprost z definicji, a druga z definicji i Lematu 2.5. Widzimy więc, że $\mu^\star$ jest miarą zewnętrzną. Z 1) i 2) wynikają jeszcze dwie własności:

3) $\mu^\star(A) \leqslant \mu^\star(B)$, jeśli $A \subset B$,
4) $\mu^\star(\emptyset) = 0$.

II. W drugim kroku zdefiniujemy pojęcie zbioru *mierzalnego*. Zbiór $E \subset \boldsymbol{R}^d$ nazywa się mierzalny, jeśli dla każdego $A \subset \boldsymbol{R}$

$$\mu^\star(A) = \mu^\star(A \cap E) + \mu^\star(A \setminus E).$$

Ze względu na podaddytywność $\mu^\star$ warunek ten jest równoważny nierówności

$$\mu^\star(A) \geqslant \mu^\star(A \cap E) + \mu^\star(A \setminus E). \tag{3.3}$$

Będziemy cytować (3.3), mówiąc, że E spełnia test mierzalności zbiorem A. Rodzinę zbiorów mierzalnych będziemy oznaczać przez $\mathcal{M}$.

3.4. *Jeśli $\mu^\star(A) = 0$, to A jest mierzalny.*

Rodzinę zbiorów miary zero będziemy oznaczać przez $\mathcal{N}$.

III. Trzecim i zasadniczym krokiem będzie

3.5. Twierdzenie. *Rodzina $\mathcal{M}$ jest σ-ciałem, a*

$$\mu^\star : \mathcal{M} \to [0, \infty]$$

przeliczalnie addytywną funkcją zbioru, a więc miarą.

Dowód. Jest jasne, że jeśli $E \in \mathcal{M}$, to także $E^c \in \mathcal{M}$. Niech $E, F \in \mathcal{M}$. Dla $A \subset \boldsymbol{R}^d$

$$\begin{aligned}
&\mu^\star(A \cap (E \cup F)) + \mu^\star(A \setminus (E \cup F)) \\
&\quad = \mu^\star\Big((A \cap E) \cup (A \cap E^c \cap F\Big) + \mu^\star(A \cap E^c \cap F^c) \\
&\quad \leqslant \mu^\star(A \cap E) + \mu^\star(A \cap E^c \cap F) + \mu^\star(A \cap E^c \cap F^c) \\
&\quad \leqslant \mu^\star(A \cap E) + \mu^\star(A \cap E^c) \leqslant \mu^\star(A),
\end{aligned}$$

gdzie najpierw testowaliśmy zbiór mierzalny F zbiorem $A \setminus E$, a następnie zbiór mierzalney E zbiorem A. Stąd już łatwo wynika, że $\mathcal{M}$ jest zamknięta na skończone sumy i iloczyny.

Niech teraz $E, F \in \mathcal{M}$ będą rozłączne. Niech $A \subset \boldsymbol{R}^d$. Z testu mierzalności zbioru F zbiorem $A \cap (E \cup F)$ wynika, że

$$\begin{aligned}
\mu^\star(A \cap E) + \mu^\star(A \cap F) &= \mu^\star(A \cap (E \cup F) \setminus F) + \mu^\star(A \cap (E \cup F) \cap F) \\
&= \mu^\star(A \cap (E \cup F)),
\end{aligned}$$

a stąd już przez łatwą indukcję

$$\mu^\star\Big(A \cap \bigcup_{k=1}^n E_k\Big) = \sum_{k=1}^n \mu^\star(A \cap E_k),$$

o ile $E_k \in \mathcal{M}$ są parami rozłączne. Ostatnia własność pokazuje, że $\mu^\star$ jest skończenie addytywna na $\mathcal{M}$.

Aby pokazać, że $\mathcal{M}$ jest zamknięta na przeliczalne sumy, wystarczy ograniczyć się do sum zbiorów parami rozłącznych. Jeśli $E = \bigcup_{k=1}^\infty$ i E_k są parami rozłączne, to dla każdego n

$$\mu^\star(A \setminus E) + \sum_{k=1}^n \mu^\star(A \cap E_k) \leqslant \mu^\star(A \setminus \bigcup_{k=1}^n E_k) + \mu^\star(A \cap \bigcup_{k=1}^n E_k) \leqslant \mu^\star(A),$$

bo $\bigcup_{k=1}^n E_k \in \mathcal{M}$, skąd

$$\mu^\star(A \setminus E) + \sum_{k=1}^\infty \mu^\star(A \cap E_k) \leqslant \mu^\star(A),$$

a następnie

$$\mu^\star(A \setminus E) + \mu^\star(A \cap E) \leqslant \mu^\star(A \setminus E) + \sum_{k=1}^\infty \mu^\star(A \cap E_k) \leqslant \mu^\star(A),$$

co pokazuje, że $E \in \mathcal{M}$. Jeśli w ostatniej nierówności wstawimy $A = E$, otrzymamy

$$\sum_{k=1}^\infty \mu^\star(E_k) = \mu^\star(E),$$

a więc przeliczalną addytywność $\mu^\star$ na σ-ciele $\mathcal{M}$. $\square$

IV. Możemy już uczynić ostatni krok.

3.6. *$\mathcal{B}(\boldsymbol{R}^d)$ zawiera się w $\mathcal{M}$.*

Dowód. Jako że $\mathcal{M}$ jest σ-ciałem, wystarczy w tym celu pokazać, że przedziały są mierzalne. Niech więc $I \in \mathcal{P}$ i niech $A \subset \boldsymbol{R}$. Niech

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k.$$

Wtedy

$$I_k = (I_k \cap I) \cup I_k \setminus I = (I_k \cap I) \cup \bigcup_j I_{kj},$$

gdzie przedziały I_{kj} są parami rozłączne, więc

$$\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \left(|I_k \cap I| + \sum_j |I_{kj}| \right) \geqslant \mu^\star(A \cap I) + \mu^\star(A \setminus I),$$

skąd

$$\mu^\star(A) \geqslant \mu^\star(A \cap I) + \mu^\star(A \setminus I).$$

□

Połóżmy

$$\mu = \mu^\star\Big|_{\mathcal{B}}, \qquad \mu^\sim = \mu^\star\Big|_{\mathcal{M}}.$$

Skonstruowana funkcja μ to *miara Lebesgue'a*, a $\mu^\sim$ – *uzupełniona* miara Lebesgue'a. Najczęściej nie będziemy (w naszej notacji) rozróżniać tych miar, pisząc μ zamiast $\mu^\sim$.

V. W ten sposób zakończyliśmy naszą konstrukcję. Pozostaje jeszcze udowodnić jedyność miary μ na zbiorach borelowskich. Przypuśćmy, że istnieje druga miara borelowska

$$\nu : \mathcal{B} \to [0, \infty]$$

spełniająca warunek (3.2). Niech $E \in \mathcal{B}$. Wtedy

$$\nu(E) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \nu(I_n) = \sum_{n=1}^{\infty} |I_n|, \qquad E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n,$$

jeśli I_n są przedziałami, a wobec dowolności pokrycia $\nu(E) \leqslant \mu(E)$. Aby wykazać nierówność przeciwną, załóżmy, że $E \subset P$, gdzie P jest przedziałem. Wtedy

$$\nu(P) - \nu(E) = \nu(P \setminus E) \leqslant \mu(P \setminus E) = \mu(P) - \mu(E),$$

skąd $\mu(E) \leqslant \nu(E)$. Zatem obie miary zgadzają się na ograniczonych podzbiorach borelowskich. Dla dowolnego $E \in \mathcal{B}$, niech $E_n = E \cap [-n, n]^d$. Wtedy

$$\nu(E) = \nu(\bigcup_n^{\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} \nu(E_n), \qquad \mu(E) = \mu(\bigcup_n^{\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n),$$

a ponieważ obie miary zgadzają się na zbiorach E_n, zgadzają się też na zbiorze E. Zatem $\nu = \mu$. Tym samym zakończyliśmy dowód Twierdzenia 3.1.

4. Dalsze własności miary Lebesgue'a

4.1. *Miara Lebesgue'a jest niezmiennicza na translacje. Innymi słowy, dla każdego* $x \in \boldsymbol{R}^d$ *i każdego* $E \in \mathcal{M}$

$$\mu(E + x) = \mu(E).$$

Dowód. Z definicji miary zewnętrznej wynika, że dla dowolnego zbioru $A \subset \boldsymbol{R}^d$ i dowolnego $x \in \boldsymbol{R}^d$

$$\mu^\star(A + x) = \mu^\star(A). \tag{4.2}$$

Wykorzystując (4.2) i test mierzalności łatwo sprawdzamy, że translacja zbioru mierzalnego jest też zbiorem mierzalnym, co razem z (4.2) daje tezę. □

Pokażemy teraz, że uzupełniona miara Lebesgue'a na $\mathcal{M}$ jest *regularna.*

4.3. *Niech* μ *będzie uzupełnioną miarą Lebesgue'a na* $\mathcal{M}$. *Dla każdego* $E \in \mathcal{M}$ *i każdego* $\varepsilon > 0$ *istnieją zbiory* $F \subset E \subset G$, *gdzie* F *jest domknięty, a* G *otwarty, takie że* $\mu(G \setminus F) < \varepsilon$.

Dowód. Niech $E \in \mathcal{M}$ i niech $E_n = E \cap [-n, n]$ dla $n \in \boldsymbol{N}$. Dla danego $\varepsilon > 0$ istnieje zbiór otwarty G_n, taki że

$$\mu(G_n \setminus E_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}, \qquad E_n \subset G_n.$$

Zatem $E \subset G = \bigcup_{n=1}^\infty G_n$, gdzie G jest otwarty, oraz

$$\mu(G \setminus E) \leqslant \sum_{n=1}^\infty \mu(G_n \setminus E_n) \leqslant \varepsilon.$$

Na mocy praw de Morgana istnieje też zbiór domknięty $F \subset E$, taki że $\mu(E \setminus F) \leqslant \varepsilon$. Ostatecznie więc

$$\mu(G \setminus F) \leqslant 2\varepsilon.$$

□

4.4. Wniosek. *Jeśli* E *jest zbiorem mierzalnym, to*

$$\mu(E) = \sup_{K \subset E} \mu(K) = \inf_{E \subset G} \mu(G),$$

gdzie zbiory K *są zwarte, a zbiory* G *otwarte.*

5. Miara Lebesgue'a na $\boldsymbol{R}$

Niech teraz $d = 1$. Zauważmy, że z faktu, że zbiory jednopunktowe mają miarę zero, i przeliczalnej addytywności miary Lebesgue'a wynika, iż

$$\mu(\boldsymbol{Q}) = 0,$$

a stąd

$$\mu([0, 1] \setminus \boldsymbol{Q}) = 1.$$

Tak więc zbiór liczb niewymiernych w odcinku $[0, 1]$ jest miary 1, chociaż nie zawiera żadnego zbioru otwartego. na mocy regularności miary zawiera jednak zbiór domknięty miary tak bliskiej 1, jak tylko zechcemy. Warto się nad tym trochę zastanowić, bo nasza intuicja buntuje się przeciw temu!

Przypomnijmy, że dla zbiorów $A, B \subset \boldsymbol{R}$ i $x \in \boldsymbol{R}$

$$A + x = \{a + x : a \in A\}, \qquad A - B = \{a - b : a \in A,\ b \in B\}.$$

Łatwo widzieć, że $x \in A - B$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A \cap (B + x) \neq \emptyset$.

5.1. Twierdzenie (Steinhaus). *Jeśli $E \subset \boldsymbol{R}$ jest zbiorem mierzalnym miary dodatniej, to istnieje $\varepsilon > 0$, taki że*

$$(-\varepsilon, \varepsilon) \subset E - E.$$

Dowód. Niech I_n będą parami rozłącznymi przedzałami takimi, że

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n, \qquad \mu(E) \geqslant \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(I_n).$$

Wtedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E \cap I_n) = \mu(E) \geqslant \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(I_n),$$

więc istnieje przedział $I = I_n$, taki że $\mu(E \cap I) \geqslant \frac{3}{4}\mu(I)$.

Niech $|x| < \varepsilon = \frac{\mu(I)}{4}$. Pokażemy, że $x \in E - E$, co wobec dowolności x oznacza, że $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset E - E$. Rzeczywiście,

$$\mu((E \cap I) \cup ((E \cap I) + x) \leqslant \mu(I \cap (I + x)) \leqslant \frac{5\mu(I)}{4}.$$

Gdyby zbiory $E \cap i$ i $E \cap I + x$ były rozłączne, mielibyśmy

$$\mu((E \cap I) \cup ((E \cap I) + x) = 2\mu(E \cap I) \geqslant \frac{6\mu(I)}{4},$$

co przeczy poprzedniej nierówności. Tym bardziej, $E \cap (E + x) \neq \emptyset$, więc $x \in E - E$, czego chcieliśmy dowieść. $\square$

Widzimy więc, że chociaż zbiór miary dodatniej może nie zawierać żadnego przedziału, to jest jednak na tyle duży, że zbiór różnic jego elementów taki przedział zawiera.

Przykład. Odcinek $[0, 1)$ wraz z działaniem

$$x \oplus y = \mathbf{m}(x + y)$$

tworzy grupę. Sprawdzimy, że jeśli $E \subset [0, 1)$ i $q \in \boldsymbol{R}$, to

$$\mu^\star(E \oplus q) = \mu^\star(E).$$

W tym celu wystarczy się ograniczyć do $-1 \leqslant q \leqslant 1$. Niech najpierw $0 < q \leqslant 1$. Mamy

$$E \oplus q = (E + q) \cap [0, 1) \cup (E + q - 1) \cap [0, 1)^c = E_1 \cup E_2..$$

Niech $\varepsilon > 0$ i niech

$$E + q \subset \bigcup_n P_n, \qquad P_n \in \mathcal{P},$$

gdzie $\sum_n |P_n| < \mu^\star(E) + \varepsilon$. Wtedy

$$\begin{aligned}\mu^\star(E \oplus q) &\leqslant \mu^\star(E_1) + \mu^\star(E_2) \leqslant \mu^\star\left(\bigcup P_n \cap [0,1)\right) + \mu^\star\left(\bigcup (P_n - 1) \cap [0,1)^c\right)\\ &\leqslant \mu^\star\left(\bigcup P_n \cap [0,1)\right) + \mu^\star\left(\bigcup (P_n) \cap [0,1)^c\right)\\ &= \mu^\star\left(\bigcup P_n\right) \leqslant \sum_n |P_n| < \mu^\star(E) + \varepsilon,\end{aligned}$$

a więc

$$\mu^\star(E \oplus q) \leqslant \mu^\star(E), \tag{*}$$

gdy $0 < q \leqslant 1$. Analogicznie postępujemy, by otrzymać (*) dla w przypadku $-1 \leqslant q < 0$, co razem daje pożądaną równość.

Przykład. Podamy przykład zbioru niemierzalnego. W zbiorze $[0,1)$ rozważmy relację

$$x \sim y \iff x - y \in \boldsymbol{Q}.$$

Nietrudno się przekonać, że jest to relacja równoważności i klasą abstrakcji elementu $x \in \boldsymbol{R}$ jest zbiór

$$\boldsymbol{Q}(x) = \{\mathbf{m}(x+q) : q \in \boldsymbol{Q}\}.$$

Na mocy pewnika wyboru istnieje więc zbiór $T \subset [0,1)$ mający z każdą klasą abstrakcji dokładnie jeden element wspólny. Zbiory $T \oplus q_1$ i $T \oplus q_2$ są rozłączne dla różnych wymiernych q_1, q_1 i mają wszystkie jednakową miarę zewnętrzną $\mu(T \oplus q) = \mu(T)$ dla każdego $q \in \boldsymbol{Q}$. Ponadto

$$[0,1) = \bigcup_{q \in \boldsymbol{Q}} T \oplus q.$$

Twierdzimy, że zbiór T jest niemierzalny. W przeciwnym bowiem razie zbiór $[0,1)$ przedstawiałby się jako przeliczalna i rozłączna suma zbiorów mierzalnych jednakowej miary, co jest niedorzecznością.

Przykład. Rozważmy jeszcze przykład, który podaje pewne uogólnienie konstrukcji zbioru Cantora. Z odcinka $[0,1]$ usuńmy przedział otwarty U_1 długości $a_1 = q$, gdzie $0 < q < 1$. Następnie ze zbioru $[0,1] \setminus U_1$, który jest sumą dwóch rozłącznych odcinków domkniętych, usuńmy zbiór otwarty U_2 będący sumą dwóch przedziałow otwartych, po jednym z każdego odcinka domkniętego, o łącznej długości $a_2 = q(1 - a_1)$. Postępując indukcyjne po n krokach pozostaje nam zbiór domknięty $[0,1] \setminus U_n$ będący sumą 2^n rozłącznych odcinków domkniętych, a suma łączna długości usuniętych odcinków otwartych $\mu(U_n) = a_n$. W kroku $n+1$ z każdego z tych odcinków domkniętych usuwamy odcinek otwarty, a łaczna długość tych odcinków wynosi

$$\mu(U_{n+1}) = a_{n+1} = q(1 - \sum_{k=1}^{n} a_k). \tag{5.2}$$

Niech $C = [0,1] \setminus \bigcup_{k=1}^\infty U_k$. Zbiór C jest niepustym zbiorem domkniętym miary 0, niezależnie od wartości q. Zauważmy bowiem, że

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \leqslant 1,$$

co wynika z konstrukcji. Zatem $a_n \to 0$ i na mocy (5.2)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(U_k) = 1,$$

a więc

$$\mu(C) = 1 - \mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} U_k) = 0.$$

Można pokazać, że zbiór C jest równoliczny ze zbiorem Cantora, a więc nieprzeliczalny.

6. Funkcje mierzalne

Niech będzie dany zbiór X z σ-ciałem $\mathcal{B} \subset 2^X$. Elementy $\mathcal{B}$ będziemy nazywać *zbiorami mierzalnymi*. Funkcja $f : X \to [-\infty, \infty]$ nazywa się *mierzalna*, jeśli dla każdego $\alpha \in \boldsymbol{R}$ zbiór

$$f^{-1}([-\infty, \alpha)) = \{x \in X : f(x) < \alpha\}$$

należy do $\mathcal{B}$.

6.1. *Funkcja $f : X \to [-\infty, \infty]$ jest mierzalna, wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego zbioru borelowskiego $E \in \mathcal{B}(\boldsymbol{R})$ jego przeciwobraz $f^{-1}(E)$ jest elementem σ ciała $\mathcal{B}$.*

Jest rzeczą oczywistą, że jeśli f jest mierzalna, to także funkcje $-f$, αf, $\alpha \in \boldsymbol{R}$, są mierzalne.

6.2. Lemat. *Jeśli f, g są mierzalne, a $\varphi : (-\infty, \infty]^2 \to (-\infty, \infty]$ funkcją ciągłą, to $h(x) = \varphi(f(x), g(x)$ jest mierzalna.*

Dowód. Niech $F : X \to (-\infty, \infty]^2$ będzie określona jako $F(x) = (f(x), g(x))$. Wtedy

$$h^{-1}(U) = F^{-1}(\varphi^{-1}(U)).$$

Jeśli $U \subset (-\infty, \infty]$ jest zbiorem otwartym, to istnieją ciągi U_k, V_k otwartych zbiorów w $(-\infty, \infty]$, takie że

$$\varphi^{-1}(U) = \bigcup_k U_k \times V_k,$$

więc

$$h^{-1}(U) = \bigcup_k F^{-1}(U_k \times V_k) = \bigcup_k f^{-1}(U_k) \cap g^{-1}(V_k).$$

Jako że $f^{-1}(U_k), g^{-1}(V_k) \in \mathcal{B}$, także $h^{-1}(U) \in \mathcal{B}$. $\square$

6.3. Wniosek. *Jeśli f, g są funkcjami mierzalnymi, to także $f+g$, $f \cdot g$ i $|f|$ są mierzalne.*

6.4. *Jeśli (f_n) jest ciągiem funkcji mierzalnych zbieżnym punktowo do funkcji f, to f jest też mierzalna.*

Dowód. Wystarczy zauważyć, że

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\} = \bigcup_N \bigcap_{n \geqslant N} \{x \in X : f_n(x) > \alpha\}.$$

$\square$

Funkcja mierzalna $f : X \to \boldsymbol{R}$ nazywa się prosta, jeśli przyjmuje tylko skończenie wiele wartości. Jeśli φ jest funkcją prostą o różnych od zera i różnych między sobą wartościach $\alpha_1, \dots, \alpha_N$, to

$$(\star) \qquad \varphi = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \chi_{E_k},$$

gdzie

$$E_k = \{x \in X : \varphi(x) = \alpha_k\}$$

są zbiorami mierzalnymi. Każda funkcja mierzalna postaci

$$\psi = \sum_k \beta_k \chi_{F_k},$$

gdzie F_k sa mierzalne, a $\beta_k \in \boldsymbol{R}$, jest prosta, nawet jeśli zbiory F_k nie są parami rozłączne, a β_k niekoniecznie różne od zera. Postać $(\star)$ funkcji prostej φ będziemy nazywać *kanoniczną*.

6.5. *Funkcje proste tworzą przestrzeń liniową. Jeśli φ jest funkcją prostą, to także $|\varphi|$ jest funkcją prostą.*

6.6. *Jeśli f jest nieujemną funkcją mierzalną, to istnieje rosnący ciąg nieujemnych funkcji prostych φ_n zbieżny do f, przy czym zbieżność jest jednostajna, gdy f jest ograniczona.*

Niech najpierw $0 \leqslant f \leqslant M$. Dla $n \in \boldsymbol{N}$ niech

$$E_{n,k} = \left\{x \in X : \frac{(k-1)M}{n} \leqslant f(x) < \frac{kM}{n}\right\}, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n$$

i niech

$$\varphi_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)M}{n} \chi_{E_{n.k}}.$$

Jak łatwo zauważyć,

$$0 \leqslant f(x) - \varphi_n(x) \leqslant \frac{M}{n},$$

a więc zbieżność jest jednostajna w przypadku funkcji ograniczonej.

Jeśli $f \geqslant$ jest ograniczona, a nawet przyjmuje wartość ∞, postępujemy tak: Dla każdego $M \in \boldsymbol{N}$ definiujemy

$$f_M = g_M + M\chi_{E_M},$$

gdzie $g_M = \min(f, M)$, a $E_M = \{x : f(x) > M\}$. Ciąg (f_M) zdąża do f, a każda z funkcji g_M jest granicą odpowiedniego ciągu funkcji prostych.

7. Definicja całki

Niech teraz μ będzie miarą na σ-ciele $\mathcal{B} \subset 2^X$. Dla nieujemnej funkcji prostej w postaci kanonicznej

$$\varphi = \sum_k \alpha_k \chi_{E_k}$$

definiujemy

$$\int \varphi \, d\mu = \sum_k \alpha_k \mu(E_k).$$

7.1. *Jeśli φ jest nieujemną funkcją prostą, to*

$$\mu_\varphi(A) = \int_A \varphi\, d\mu = \int \chi_A \varphi\, d\mu$$

jest miarą.

7.2. *Jeśli $\varphi, \psi \geqslant 0$ są proste,to*

$$\int (\varphi + \psi)\, d\mu = \int \varphi\, d\mu + \int \psi\, d\mu.$$

Dowód. Niech

$$\varphi = \sum_k \alpha_k \chi_{E_k}, \qquad \psi = \sum_j \beta_j \chi_{F_j}$$

będą postaciami kanonicznymi. Niech $A_{kj} = E_k \cap F_j$ i $A = \bigcup_{k,j} A_{kj}$. Wtedy

$$\begin{aligned}\int (\varphi + \psi)\, d\mu &= \int_A (\varphi + \psi)\, d\mu = \sum_{k,j} \int_{A_{kj}} (\varphi + \psi)\, d\mu \\ &= \sum_{k,j} (\alpha_k + \beta_j)\mu(A_{kj})\, d\mu = \sum_k \alpha_k \sum_j \mu(A_{kj}) + \sum_j \beta_j \sum_k \mu(A_{kj}) \\ &= \sum_k \alpha_k \mu(E_k) = \sum_j \beta_j \mu(F_j) = \int \varphi\, d\mu + \int \psi\, d\mu.\end{aligned}$$

$\square$

Całkę dowolnej nieujemnej funkcji mierzalnej definiujemy jako

$$\int f\, d\mu = \sup_{0 \leqslant \varphi \leqslant f} \int \varphi\, d\mu,$$

gdzie funkcje φ są proste. Ponadto dla zbioru mierzalnego E

$$\int_E f\, d\mu = \int f \chi_E\, d\mu.$$

Następujące własności całki wynikają wprost z definicji. Niech funkcje $f, g \geqslant 0$ i zbiory A, B będą mierzalne. Wtedy

1. Jeżeli $f \leqslant g$, to $0 \leqslant \int f\, d\mu \leqslant \int g\, d\mu$,

2. Jeżeli $A \subset B$, to $\int_A f\, d\mu \leqslant \int_B f\, d\mu$,

3. Jeżeli $c \in [0, \infty]$, to $\int cf\, d\mu = c \int f\, d\mu$,

4. Jeśli $\mu(\{x : f(x) > 0\}) = 0$, to $\int f\, d\mu = 0$.

8. Twierdzenia graniczne

8.1. Lemat. *Jeśli ciąg mierzalnych funkcji nieujemnych (f_n) jest zbieżny monotonicznie do funkcji f, to*

$$\int f d\mu = \lim_n \int f_n d\mu.$$

Dowód. Jest jasne, że
$$\lim_n \int f_n d\mu \leqslant \int f d\mu.$$
Dowiedziemy nierówności przeciwnej. Niech $0 \leqslant \varphi \leqslant f$ będzie funkcją prostą, a $0 < c < 1$. Niech
$$E_n = \{x \in X : f_n(x) \geqslant c\varphi(x)\}.$$
Łatwo zauważyć, że zbiory E_n są mierzalne, monotoniczne i $X = \bigcup_n E_n$. Dlatego
$$\int f_n d\mu \geqslant \int_{E_n} f d\mu \geqslant c \int_{E_n} \varphi d\mu$$
a po przejściu do granicy
$$\lim_n \int f_n \geqslant c \int \varphi d\mu.$$
Wobec dowolności φ i c, otrzymujemy
$$\lim_n \int f_n \geqslant \int f d\mu.$$
□

8.2. Wniosek. *Jeśli f, g są nieujemnymi funkcjami mierzalnymi, to*
$$\int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu.$$
Dowód. Niech φ_n i ψ_n będą monotonicznymi ciągami nieujmnych funkcji prostych zbieżnymi odpowiednio do f i g. Wtedy
$$\begin{aligned}\int (f+g)\, d\mu &= \lim \int (\varphi_n + \psi_n)\, d\mu \\ &= \lim \int \varphi_n d\mu + \lim \int \psi_n d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu.\end{aligned}$$
□

8.3. Wniosek. *Jeśli $f_n \geqslant 0$ są mierzalne, to*
$$\int \sum_n f_n d\mu = \sum_n \int f_n d\mu.$$

8.4. Lemat (Fatou). *Jeśli f_n są nieujemnymi funkcjami mierzalnymi, to*
$$\int \liminf_n f_n d\mu \leqslant \liminf_n \int f_n d\mu.$$
Dowód. Niech $f = \liminf_n f_n$ i niech
$$g_n = \inf_{k \geqslant n} f_k.$$
Mamy
$$\lim_n g_n = f, \qquad 0 \leqslant g_n \leqslant g_{n+1} \leqslant f_{n+1},$$
a więc
$$\int \liminf_n f_n d\mu = \int f d\mu = \lim_n \int g_n d\mu \leqslant \liminf_n \int f_n d\mu.$$
□

Będziemy mówili, że ciąg funkcji mierzalnych jest *zbieżny punktowo prawie wszędzie*, jeśli istnieje zbiór miary zero E i funkcja mierzalna f, taka że

$$f(x) = \lim_n f_n(x), \qquad x \in X \setminus E.$$

9. Przestrzeń funkcji całkowalnych

Zacznijmy od prostej uwagi.

9.1. *Uwaga.* Jeśli f jest nieujemną funkcją mierzalną i

$$\int f d\mu < \infty,$$

to zbiór

$$E = \{x \in X : f(x) = \infty\}$$

ma miarę zero.

Dowód. Istotnie, zbiór E można przedstawić jako przeliczalny przekrój

$$E = \bigcap_n E_n, \qquad E_n = \{x \in X : f(x) \geqslant n\},$$

gdzie

$$\mu(E_n) \leqslant \frac{1}{n} \int f d\mu,$$

więc

$$\mu(E) = \lim \mu(E_n) = 0.$$

□

Funkcję zespoloną $f : X \to \boldsymbol{C} \cup \{\infty\}$ nazywamy mierzalną, jeśli dla dowolnego otwartego $U \subset \boldsymbol{C} \cup \{\infty\}$ przeciwobraz $f^{-1}(U)$ jest mierzalny. Nietrudno zauważyć, że $f = u + iv$ jest mierzalna, wtedy i tylko wtedy gdy funkcje rzeczywiste u, v są mierzalne. Zatem z mierzalności f wynika mierzalność funkcji

$$|f| = \sqrt{u^2 + v^2},$$

gdzie $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$. Jeśli f jest rzeczywista i mierzalna, to mierzalne są też funkcje

$$f_+ = \max(f, 0) \geqslant 0, \qquad f_- = f_+ - f \geqslant 0.$$

Funkcję $f : f : X \to \boldsymbol{C} \cup \{\infty\}$ nazywamy *całkowalną*, jeśli

$$\int |f(x)| \mu(dx) < \infty,$$

a całkę z funkcji całkowalnej określamy przez

$$\begin{aligned} \int f(x)\mu(dx) = \int u_+(x)\mu(dx) - \int u_-(x)\mu(dx) \\ + i \int v_+(x)\mu(dx) - i \int v_-(x)\mu(dx). \end{aligned}$$

Zauważmy, że jeśli g oznacza jedną z czterech nieujemnych funkcji składowych, to

$$0 \leqslant g \leqslant |f|,$$

a więc wszystkie cztery całki mają sens i są skończone. Ponadto, każda z tych funkcji jest skończona poza zbiorem miary zero. Zbiór wszystkich funkcji całkowalnych będziemy oznaczać przez

$$L^1 = L^1(X) = L^1(X, \mu).$$

9.2. *Jeśli funkcje f, g są całkowalne, to*

$$\int (f+g)\, d\mu = \int f\, d\mu + \int g\, d\mu.$$

Dowód. Wystarczy rozpatrzyć przypadek funkcji rzeczywistych. Niech $F = f + g$. Wtedy

$$F^+ - F^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-,$$

a więc

$$F^+ + f^- + g^- = f^+ + g^+ + F^-,$$

skąd

$$\int F^+ + \int f^- + \int g^- = \int f^+ + \int g^+ + \int F^+.$$

Porządkując, mamy

$$\int F^- - \int F^- = \Big(\int f^+ - \int f^-\Big) + \Big(\int g^+ - \int g^-\Big),$$

czyli

$$\int F = \int f + \int g.$$

□

9.3. *Jeśli f jest całkowalna i $\alpha \in \boldsymbol{C}$, to*

$$\int \alpha f\, d\mu = \alpha \int f\, d\mu.$$

Dowód. Najpierw łatwo sprawdzamy, że jeśli f jest rzeczywista, a liczba $c \in \boldsymbol{R}$, to

$$\int cf = c \int f, \qquad \int if = i \int f.$$

Niech teraz $f = u + iv$, $\alpha = a + ib$. Wtedy

$$\alpha f = au - bv + i(av + bu),$$

więc

$$\begin{aligned} \int \alpha f &= a \int u - b \int v + i\Big(a \int v + b \int u\Big) \\ &= a \int (u + iv) + ib \int (u + iv) \\ &= \alpha \int f. \end{aligned}$$

□

9.4. *Jeśli f jest całkowalna, to*

$$|\int f d\mu| \leqslant \int |f| d\mu.$$

Dowód. Niech c będzie liczbą zespoloną o module 1, taką że

$$|\int f d\mu| = c \int f d\mu.$$

Wtedy

$$\begin{aligned} |\int f d\mu| &= c \int f d\mu = \int u_+ d\mu - \int u_- \, d\mu \\ &\leqslant \int u_+ d\mu + \int u_- \, d\mu = \int |u| d\mu \leqslant \int |f| d\mu, \end{aligned}$$

gdzie po drugiej równości pominęliśmy część urojoną, bo nasza liczba $|\int f d\mu|$ jest rzeczywista. □

9.5. Twierdzenie. *Przestrzeń $L^1(X,\mu)$ jest przestrzenią liniową nad $\boldsymbol{C}$, a całka*

$$f \mapsto \int_X f d\mu$$

ciągłym funkcjonałem liniowym.

W przestrzeni $L^1(X,\mu)$ zdefiniujmy półnormę

$$\|f\|_1 = \int |f| d\mu.$$

9.6. Twierdzenie (Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej). *Jeśli ciąg funkcji całkowalnych f_n jest zbieżny punktowo i ma majorantę*

$$|f_n(x)| \leqslant g(x), \qquad g \in L^1(X,\mu),$$

to granica $f(x) = \lim f_n(x)$ jest funkcją całkowalną i

$$\|f - f_n\|_1 \to 0.$$

Dowód. Załóżmy na razie, że funkcje f_n są nieujemne i $f_n \to 0$. Wtedy również funkcje $g - f_n$ są nieujemne i na mocy lematu Fatou oraz równości $\liminf(-a_n) = -\limsup a_n$ mamy

$$\begin{aligned} \int g d\mu &= \int \lim_n (g - f_n) d\mu \leqslant \liminf_n \int (g - f_n)\, d\mu \\ &\leqslant \int g d\mu + \liminf \int (-f_n)\, d\mu = \int g d\mu - \limsup_n \int f_n d\mu, \end{aligned}$$

skąd

$$\lim_n \int f_n d\mu = \limsup_n \int f_n d\mu = 0,$$

bo funkcje f_n są nieujemne.

Niech teraz f_n będą dowolne. Niech $f = \lim_n f_n$. Granica f jest mierzalna i całkowalna, bo $|f| \leqslant g$. Stosując pierwszą część dowodu do nieujemnego ciągu $|f_n - f| \to 0$ funkcji całkowalnych, który spełnia $|f_n - f| \leqslant 2g$, otrzymujemy

$$\lim_n \|f_n - f\|_1 = \lim_n \int |f_n - f| d\mu = 0,$$

co jest naszą tezą. □

Jak łatwo widać, przestrzeń zerowa półnormy $f \mapsto \|f\|_1$, to

$$\begin{aligned} L^1_0(X,\mu) &= \{f \in L^1(X,\mu) : \|f\|_1 = 0\} \\ &= \{f \in L^1(X,\mu); f(x) = 0 \text{ dla p.w. } x \in X\}. \end{aligned}$$

Jako że $L_0(X,\mu)$ zawiera się w jądrze funkcjonału $f \mapsto \int f d\mu$, funkcjonał ten można w naturalny sposób rozważać na przestrzeni unormowanej

$$\widetilde{L}^1(X,\mu) = L^1(X\mu)/L_0(X,\mu).$$

Jeśli $\widetilde{f} = f + L^1_0(X,\mu)$ jest klasą abstrakcji f, to

$$\int \widetilde{f} d\mu = \int f d\mu, \qquad \|\widetilde{f}\|_1 = \int |f| d\mu.$$

Trzeba jednak pamiętać, że w przestrzeni ilorazowej traci sens pojęcie zbieżności punktowej, które trzeba zastąpić pojęciem *zbieżności punktowej prawie wszędzie.* W dalszym ciągu będziemy operować funkcjami całkowalnymi, pamiętając, że są one reprezentantami klas abstrakcji funkcji równoważnych. Aby nie rozbudowywać nadmiernie notacji będziemy opuszczać znak $\widetilde{}$ nad symbolem przestrzeni ilorazowej.

9.7. *Jeśli ciąg (f_n) jest zbieżny do f w $L^1(X)$, to istnieje podciąg (f_{n_k}) zbieżny do f prawie wszędzie.*

Dowód. Skoro ciąg (f_n) jest zbieżny w normie $L^1(X)$, to istnieje podciąg (f_{n_k}), taki że

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_1 < \infty.$$

Przyjmijmy dla wygody, że $f_{n_1} = 0$. Jeśli więc

$$g = \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|,$$

to

$$\int g\, d\mu \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_1 < \infty$$

i w takim razie dla prawie wszystkich x

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| < \infty,$$

skąd wynika zbieżność szeregu, a więc i zbieżność ciągu $(f_{n_k}(x))$ dla prawie wszystkich x. W istocie, mamy

$$f_{n_k}(x) = f_{n_1}(x) + \sum_{j=1}^{k} f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x) = \sum_{j=1}^{k} f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x),$$

a więc

$$\lim_k f_{n_k}(x) = h(x),$$

gdzie

$$h(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x), \qquad |h(x)| \leqslant g(x).$$

Na mocy twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej, $\|f_{n_k} - h\|_1 \to 0$, a więc

$$\|f - h\|_1 \leqslant \|f - f_{n_k}\|_1 + \|f_{n_k} - h\|_1 \to 0,$$

gdy $k \to \infty$, czyli $f = h$ prawie wszędzie. $\square$

9.8. Przykład. Niech naszą przestrzenią miarową będzie odcinek $[0,1]$ z miarą Lebesgue'a. Dla każdego $n \in \boldsymbol{N}$ rozważmy odcinki

$$E_{n,k} = \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right], \qquad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Ustawmy wszystkie te odcinki w jeden ciąg E_m i zdefinujmy $f_m = \chi_{E_m}$. Łatwo widać, że

$$\|f_m\|_1 \to 0, \qquad \liminf f_m(x) = 0, \qquad \limsup f_m(x) = 1$$

dla wszystkich $x \in [0,1]$. Tak więc ciąg zbieżny w normie L^1 może być rozbieżny wszędzie.

9.9. Twierdzenie. *Przestrzeń unormowana $L^1(X,\mu)$ jest zupełna.*

Dowód. Wystarczy pokazać, że każdy absolutnie zbieżny szereg elementów L^1 jest zbieżny. Niech więc $f_n \in L^1(X,\mu)$ i

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_1 < \infty.$$

Niech $g = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$. Funkcja g jest nieujemną funkcją mierzalną i

$$\int g d\mu \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \int |f_n| d\mu < \infty,$$

a więc

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| < \infty$$

dla p.w. $x \in X$. Zatem szereg

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

jest zbieżny p.w. i definiuje funkcję całkowalną, bo $|f| \leqslant g$ p.w. Pozostaje pokazać, że f jest sumą szeregu $\sum f_n$ w normie przestrzeni L^1. Rzeczywiście,

$$\begin{aligned}\|f - \sum_{n=1}^{N} f_n\|_1 &= \int |f - \sum_{n=1}^{N} f_n| d\mu = \int |\sum_{n=N+1}^{\infty} f_n| d\mu \\ &\leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} \int |f_n| d\mu = \sum_{n=N+1}^{\infty} \|f_n\|_1 \to 0,\end{aligned}$$

gdy $N \to \infty$. $\square$

10. PRZESTRZENIE $L^p(X,\mu)$

10.1 (Nierówność Höldera). *Niech* $p > 0$, $q > 0$ *oraz* $1/p + 1/q = 1$. *Wtedy*

$$\sum_{k=1}^{N} a_k b_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{N} a_k^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{N} b_k^q\right)^{1/q}, \qquad a_k, b_k \geqslant 0.$$

10.2 (Nierówność Höldera dla całek). *Niech* $p > 0$, $q > 0$ *oraz* $1/p + 1/q = 1$. *Wtedy*

$$\int fg d\mu \leqslant \left(\int f^p d\mu\right)^{1/p} \left(\int g^q d\mu\right)^{1/q}, \qquad f, g \geqslant 0.$$

10.3 (Nierówność Minkowskiego). *Dla każdego* $1 < p < \infty$ *mamy*

$$\left(\int (f+g)^p d\mu\right)^{1/p} \leqslant \left(\int f^p d\mu\right)^{1/p} + \left(\int g^p d\mu\right)^{1/p}, \qquad 0 \leqslant f, g \in Mes.$$

Dla funkcji mierzalnej f i $1 < p\infty$ definiujemy

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p d\mu\right)^{1/p}$$

oraz

$$L^p(X,\mu) = \{f \in Mes(X,\mu) : \|f\|_p < \infty\}.$$

10.4. Twierdzenie. *Funkcjonał* $f \mapsto \|f\|_p$ *jest normą na przestrzeni wektorowej* $L^p(X,\mu)$. *Przestrzeń ta jest zupełna.*

Dowód. To że $L^p(X\mu)$ jest przestrzenią wektorową, a $f \mapsto \|f\|_p$ normą wynika z nierówności Minkowskiego. Zupełności dowodzi się bardzo podobnie do zupełności $L^1(X,\mu)$. $\square$

10.5. Twierdzenie (Lebesgue'a o zmajoryzowanej zbieżności dla L^p). *Niech* $1 < p < \infty$. *Niech będzie dana nieujemna funkcja* $g \in L^p(X,\mu)$ *oraz ciąg funkcji* $f_n \in L^p(X,\mu)$, *taki że* $|f_n| \leqslant g$. *Jeśli ciąg* (f_n) *jest zbieżny p.w. do funkcji* f, *to* $f \in L^p(X,\mu)$ *i*

$$\|f_n - f\|_p \to 0.$$

Dowód. Ciąg funkcji całkowalnych $|f_n|^p$ jest zbieżny p.w. i zmajoryzowany funkcją całkowalną g^p, więc na mocy twierdzenia Lebesgue'a dla L^1 funkcja $|f|^p$ jest całkowalna, czyli $f \in L^p(X,\mu)$. Stosując raz jeszcze twierdzenie Lebesgue'a do ciągu $|f_n - f|^p$ zbieżnego p.w. do 0 i zmajoryzowanego funkcją całkowalną $2^{p+1}g^p$, otrzymujemy tezę. $\square$

10.6. *Dla każdego* $1 \leqslant p < \infty$ *funkcje proste całkowalne leżą gęsto w* $L^p(X,\mu)$.

Dowód. Zauważmy najpierw, że funkcja prosta

$$\varphi = \sum_k \alpha_k \chi_{E_k}$$

w postaci kanonicznej jest całkowalna, wtedy i tylko wtedy gdy $\mu(E_k) < \infty$ dla każdego k. Taka funkcja jest też całkowalna z p-tą potęgą. Aby udowodnić nasze twierdzenie, wystarczy wskazać dla każdej funkcji nieujemnej $f \in L^p(X,\mu)$ ciąg całkowalnych funkcji prostych φ_n, taki że

$$\|f - \varphi_n\|_p \to 0.$$

Skoro f jest nieujemna, istnieje ciąg funkcji prostych $0 \leqslant \varphi_n \leqslant f$ zbieżny punktowo do f. Funkcje φ_n są całkowalne, bo $f \in L^p(X, \mu)$. Na mocy twierdzenia Lebesgue'a dla L^p

$$\|f - \varphi_n\|_p \to 0.$$

$\square$