1. Niech $\widetilde{\mathbf{H}}_1$ oznacza zbiór macierzy postaci

$$X = \begin{pmatrix} 1 & p & t \\ 0 & 1 & q \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pokaż, że macierze te tworzą grupę izomorficzną z grupą Heisenberga $\mathbf{H}_1$ W tym celu rozważ odwzorowanie $\varphi : \widetilde{\mathbf{H}_1} \to \mathbf{H}_1$ określone wzorem

$$\varphi(p, q, t) = (p, q, t - \frac{1}{2}pq).$$

2. Niech $\widetilde{\mathfrak{h}}_1$ oznacza zbiór macierzy postaci

$$A = \begin{pmatrix} 0 & p & t \\ 0 & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pokaż, że macierze te z komutatorem $[A, B] = AB - BA$ tworzą algebrę Liego izomorficzną z algebrą Heisenberga $\mathfrak{h}_1$.

3. Sprawdź, że odwzorowanie wykładnicze

$$A \to e^A = I + A + \cdots + \frac{1}{n!}A^n + \ldots$$

jest homeomorfizmem $\widetilde{\mathfrak{h}_1}$ na $\widetilde{\mathbf{H}}_1$ spełniającym warunek

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]}.$$

4. Pokaż, że każda domknięta podgrupa $\mathbf{R}^n$ jest postaci $G = V \times H$, gdzie V jest podprzestrzenią wektorową, a H jest izomorficzna z $\mathbf{Z}^k$.

5. Niech $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{H}_n$ będzie ciągłym homomorfizmem. Pokaż, że istnieje $A \in \mathbf{H}_n$, takie że $\varphi(t) = tA$.

6. Każdemu elementowi $A \in \mathbf{H}_n$ przyporządkowujemy pole wektorowe

$$\partial_A f(X) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(X \circ (tA)), \qquad f \in C_c^\infty(\mathbf{H}_n).$$

Niech $[\partial_A, \partial_B] = \partial_A \partial_B - \partial_B \partial_A$. Sprawdź, że

$$[\partial_A, \partial_B] = \partial_{[A,B]}.$$

7. Niech $A = (p_0, q_0, r_0) \in \mathfrak{h}_1$. Sprawdź, że

$$\partial_A = p_0 \frac{\partial}{\partial p} + q_0 \frac{\partial}{\partial q} + \frac{1}{2} < (p, q), (p_0, q_0) > \frac{\partial}{\partial r}$$