

Grupa Heisenberga – wykład do wyboru

Grupa Heisenberga jest najprostszą nieprzemienią nilpotentną grupą Liego. Studium grupy Heisenberga i związanych z nią obiektów jest znakomitym wstępem do poznania wielu idei analizy harmonicznej, teorii cząstkowych równań różniczkowych i mechaniki kwantowej. Swój bardzo prosty i modelowy wyraz znajduje tu na przykład teoria reprezentacji unitarnych nilpotentnych grup Liego.

Jako rozmaitość różniczkowalna trójwymiarowa grupa Heisenberga może być utożsamiona z \mathbf{R}^3 z działaniem

$$(x_1, y_1, z_1) \circ (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2 + \frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1)).$$

Relacja komutacyjna bazowych pól wektorowych

$$[X, Y] = Z,$$

gdzie

$$X = \partial_x + \frac{1}{2}y \partial_z, \quad Y = \partial_y - \frac{1}{2}x \partial_z, \quad Z = \partial_z,$$

wyraźnie wskazuje na możliwe powiązania interpretacyjne z mechaniką kwantową. Dodajmy jeszcze, że operator Lewy'ego

$$L = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y) + i(x - iy)\partial_z$$

jest sztandarowym przykładem nierozwiązalnego operatora różniczkowego.

Od słuchaczy oczekuje się znajomości analizy wielu zmiennych, elementarnej analizy funkcji zmiennej zespolonej, analizy funkcjonalnej, transformaty Fouriera w \mathbf{R}^n . Dobrze jest też znać twierdzenie spektralne i elementy teorii równań różniczkowych cząstkowych. Stopień trudności i styl prowadzenia zajęć zostanie w miarę możliwości dostosowany do potrzeb słuchaczy. Termin odbywania zajęć podlega negocjacom.

A oto plan wykładu:

1. Grupa Heisenberga i jej algebra Liego
2. Reprezentacja Schrödingera
3. Twierdzenie Stone'a-von Neumanna
4. Reprezentacja Focka-Bargmanna
5. Funkcje Hermite'a i Laguerre'a
6. Operatory różniczkowe na \mathbf{R}^n

Polecana literatura:

1. G.B. Folland, *Harmonic Analysis in Phase Space*,
2. R. Howe, *Quantum Mechanics and Partial Differential Equations*,
3. E.M. Stein, *Harmonic Analysis*, rozdz. XII, XIII.

Serdecznie zapraszam!

Paweł Głowacki
