Część I: Analiza harmoniczna w $\boldsymbol{R}^n$

Polecana literatura:

1. L. Grafakos, Classical Fourier analysis, rozdziały 2 i 4,
2. L. Hörmander, Analysis of differential operators, tom I, rozdziały 1-4,
3. W. Rudin, Analiza funkcjonalna, rozdziały 6 i 7,
4. Stein, Singular integrals and differentiability properties of functions, rozdziały 1 i 2,
5. Stein, Harmonic analysis, rozdziały 1 i 2,
6. Stein-Weiss, Fourier analysis on Euclidean spaces, rozdział 1.

1. Dystrybucje temperowane na $\boldsymbol{R}^n$.

1.1. Funkcja $f : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{C}$ nazywa się *szybko malejąca*, jeśli dla każdego $N \in \boldsymbol{N}$ istnieje stała $C_N > 0$, taka że

$$|f(x)| \leq C_n(1 + |x|)^{-N}.$$

Funkcja $F : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{C}$ nazywa się *wolno rosnąca*, jeśli istnieją stałe $C > 0$ i $N > 0$, takie że

$$|F(x)| \leq C(1 + |x|)^N.$$

Miara borelowska μ na $\boldsymbol{R}^n$ nazywa się *wolno rosnąca*, jeśli istnieje $N > 0$, takie że

$$\int_{\boldsymbol{R}^n} (1 + |x|)^{-N} \mu(dx) < \infty.$$

1.2. Mówimy, że f jest funkcją Schwartza i piszemy $f \in \mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n)$, jeśli $f \in C^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ i każda z pochodnych $D^\alpha f$ jest funkcją szybko malejącą.

1.3. Przestrzeń $\mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n)$ jest przestrzenią liniową, a wyposażona w rodzinę półnorm

$$\|f\|_{(N)} = \max_{|\alpha| \leq N} \sup_{x \in \boldsymbol{R}^n} (1 + |x|)^N |D^\alpha f(x)|$$

staje się lokalnie wypukłą przestrzenią Frechéta.

1.4. *Dystrybucją temperowaną* nazywamy ciągły funkcjonał liniowy na przestrzeni Schwartza $\mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n)$.

1.5. **Przykłady.** Przykładami dystrybucji temperowanych są a) wolno rosnące funkcje lokalnie całkowalne, b) miary wolno rosnące, c) w szczególności delty Diraca.

1.6. **Przykład (dystrybucja Hilberta).** Niech

$$\langle H, f \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{f(x)\,dx}{x}, \qquad f \in \mathcal{S}(\boldsymbol{R}).$$

Granica ta zawsze istnieje i definiuje dystrybucję temperowaną na $\boldsymbol{R}$, która nie jest miarą wolno rosnącą.

1.7. Niech będzie dana dystrybucja T na $\boldsymbol{R}^n$ i funkcja lokalnie całkowalna F na otwartym zbiorze $\Omega \subset \boldsymbol{R}^n$. Mówimy, że dystrybucja T zgadza się z F na $\Omega \subset \boldsymbol{R}^n$, jeśli

$$\langle T, f \rangle = \int_\Omega F(x) f(x)\,dx, \qquad f \in \mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n),\ \operatorname{supp} f \subset \Omega.$$

Zauważmy, że dystrybucja H z Przykładu 1.6 zgadza się z funkcją $F(x) = 1/x$ na zbiorze $\boldsymbol{R} \setminus \{0\}$.

1.8. *Nośnikiem dystrybucji* T na $\boldsymbol{R}^n$ nazywamy najmniejszy zbiór domknięty S, taki że T znika (zgadza się z funkcją zerową) na $\boldsymbol{R}^n \setminus S$.

1.9. Jedynymi dystrybucjami o nośniku punktowym $S = \{p\}$ są dystrybucje postaci

$$\langle T_\alpha, f \rangle = D^\alpha f(p)$$

i ich kombinacje liniowe. Jeśli

$$T = \sum_\alpha c_\alpha T_\alpha,$$

to współczynniki c_α można „wyłuskać” za pomocą wzoru

$$c_\alpha = \frac{1}{\alpha!}\langle T, \varphi_\alpha\rangle,$$

gdzie $\varphi_\alpha(x) = (x-p)^\alpha \varphi(x-p)$, a φ jest gładką funkcją o nośniku zwartym równą 1 w otoczeniu zera.

1.10. Twierdzenie. Niech $k : \boldsymbol{R}^n \setminus \{0\}$ będzie ciągłą funkcją jednorodną stopnia $-n$. Załóżmy jeszcze, że

$$\int_{1\le|x|\le 2} k(x)\,dx = 0. \tag{*}$$

Wtedy wzór

$$\langle K, f\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|\ge\varepsilon} f(x)k(x)\,dx$$

definiuje dystrybucję jednorodną stopnia $-n$, która na otwartym zbiorze $\boldsymbol{R}^n \setminus \{0\}$ zgadza się z funkcją k.

Przypuśmy na odwrót, że dana jest dystrybucja K jednorodna stopnia $-n$, która na $\boldsymbol{R}^n$ pokrywa się z pewną funkcją ciągłą k. Wtedy funkcja k jest jednorodna stopnia $-n$ i spełnia warunek (*). Co więcej, sama dystrybucja zadana jest wzorem

$$\langle K, f\rangle = cf(0) + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|\ge\varepsilon} f(x)k(x)\,dx$$

dla pewnej stałej c.

1.11. Dowód: Jeśli $f \in \mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n)$, to

$$|f(x) - f(0)| \le \|f\|_{(1)}|x|, \qquad |f(x)| \le \|f\|_{(1)}|x|^{-1}.$$

Dlatego

$$|\langle K, f\rangle| \le \|f\|_{(1)}\int_{|x|\le 1}|x|^{-n+1}\,dx + \|f\|_{(1)}\int_{|x|\ge 1}|x|^{-n-1}\,dx \le C\|f\|_{(1)},$$

co pokazuje że K jest dystrybucją.

Aby udowodnić drugą część twierdzenia, zdefiniujmy pomocniczą dystrybucję

$$\langle K_0, f\rangle = \int_{|x|\le 1}(f(x) - f(0))k(x)\,dx + \int_{|x|\ge 1} f(x)k(x)\,dx,$$

która, jak nietrudno spostrzec, także zgadza się z funkcją k poza zerem. Zatem $K = K_0 + T$, gdzie T ma nośnik punktowy $S = \{0\}$. Stosując K do funkcji $f^t(x) = f(tx)$ dla $0 < t < 1$ i korzystając z tożsamości

$$\langle K, f^t\rangle - \langle K, f\rangle = 0,$$

otrzymujemy

$$f(0)\int_{t\le|x|\le 1} k(x)\,dx = \langle T, f^t\rangle - \langle T, f\rangle.$$

Obliczając współczynniki przedstawienia dystrybucji T (patrz 1.9), widzimy, że $T = c\delta_0$. W takim razie prawa strona znika, a więc warunek (*) musi być spełniony.

1.12. *Splotem* dystrybucji T z funkcją f klasy Schwartza nazywamy funkcję

$$T \star f(x) = \langle T, \widetilde{f_x}\rangle = \int T(y)f(x-y)\,dy.$$

Taki splot jest zawsze funkcją klasy C^∞, a jeśli f ma nośnik zwarty, to nawet klasy Schwartza.

1.13. Splot dystrybucji Hilberta (Przykład 1.6) z funkcją $f \in \mathcal{S}(\boldsymbol{R})$ to funkcja

$$H \star f(x) = \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|y|\ge\varepsilon}\frac{f(x-y)\,dy}{y}.$$

Przekształcenie $f \mapsto Hf = H \star f$ nazywamy transformatą Hilberta. Zauważmy, że $H(f_a) = (Hf)_a$, a więc H jest przemienne z translacjami (translacyjnie niezmiennicze).

1.14. Niech T będzie dystrybucją temperowaną. Wtedy odwzorowanie

$$\mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n) \ni f \mapsto T \star f \in C^\infty(\boldsymbol{R}_n)$$

jest ciągłe i translacyjnie niezmiennicze. Zbieżność w $C^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ to zbieżność niemal jednostajna wszystkich pochodnych.

2. Transformata Fouriera

2.1. *Transformatą Fouriera* funkcji $f \in L^1(\boldsymbol{R}^n)$ nazywamy funkcję

$$\widehat{f}(\xi) = \int f(x) e^{-2\pi i x\xi}\, dx.$$

2.2. Lemat Riemanna-Lebesgue'a. Jeśli $f \in L^1(\boldsymbol{R}^n)$, to $\widehat{f} \in C_0(\boldsymbol{R}^n)$.

2.3. Jeśli $f \in \mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n)$, to $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n)$.

2.4. Jeśli $f, g \in L^1(\boldsymbol{R}^n)$, to

$$\int f(x)\widehat{g}(x)\, dx = \int \widehat{f}(\xi) g(\xi)\, d\xi.$$

2.5. Wzór na odwrócenie. Jeśli $f \in \mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n)$, to

$$f(x) = \int \widehat{f}(\xi) e^2 \pi i x \xi\, d\xi.$$

2.6. Twierdzenie Plancherela. Jeśli $f \in \mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n)$, to

$$\int |f(x)|^2\, dx = \int |\widehat{f}(\xi)|^2\, d\xi.$$

2.7. Transformata Fouriera jest izomorfizmem przestrzeni Schwartza $\mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n)$. Jest także izometrią przestrzeni Hilberta $L^2(\boldsymbol{R}^n)$.

2.8. Jeśli $f, g \in L^1(\boldsymbol{R}^n)$, to

$$\widehat{f \star g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}.$$

2.9. Jeśli T jest dystrybucją temperowaną, to wzór

$$\langle S, f \rangle = \langle T, \widehat{f} \rangle$$

definiuje nową dystrybucję temperowaną, którą będziemy oznaczać przez $S = \widehat{T}$ i nazywać transformatą Fouriera T. Mamy więc

$$\langle \widehat{T}, f \rangle = \langle T, \widehat{f} \rangle.$$

2.10. Przykład. Niech

$$\langle H, f \rangle = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{f(x)\, dx}{x}$$

będzie dystrybucją Hilberta. Wtedy

$$\begin{aligned}
\langle \widehat{H}, f \rangle = \langle H, \widehat{f} \rangle &= \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon \leq |x| \leq 1/\varepsilon} \frac{\widehat{f}(x)\, dx}{x} \\
&= \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \int \frac{1}{x} \int_{\varepsilon \leq |x| \leq 1/\varepsilon} e^{-ix\xi} f(\xi)\, d\xi\, dx \\
&= \frac{1}{\pi i} \lim_{\varepsilon \to 0} \int f(\xi) \int_{\varepsilon \leq |x| \leq 1/\varepsilon} \frac{\sin x\xi}{x}\, dx\, d\xi \\
&= \int f(\xi) h(\xi)\, d\xi,
\end{aligned}$$

gdzie $h(\xi) = -i\sigma(\xi)$. Zatem transformatę Fouriera dystrybucji H można utożsamić z funkcją ograniczoną h.

3. Funkcje maksymalne i zbieżność prawie wszędzie.

3.1. Lemat Wienera. Niech X będzie ośrodkową przestrzenią metryczną, a $\mathcal{B}$ rodziną kul $B = B(a_B, r_B) \subset X$ o wspólnie ograniczonym promieniu. Niech $E = \bigcup \mathcal{B}$. Istnieje wtedy ciąg parami rozłącznych kul $A_n \in \mathcal{B}$, taki że $E \subset \bigcup A_n'$, gdzie $B(a,r)' = B(a, 4r)$.

3.2. Dowód: Niech $R = \sup_{B\in\mathcal{B}} r_B$ i niech $R_n = (2/3)^n R$. Zbudujemy wstępujący ciąg podrodzin $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{B}$, z których każda składa się z kul parami rozłącznych.

Niech $\mathcal{A}_1$ będzie maksymalną rodziną parami rozłącznych kul w $\mathcal{B}$ o promieniach większych od R_1. Gdy dane już są $\mathcal{A}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{A}_{k-1}$, definiujemy $\mathcal{A}_k$ jako maksymalną rodziną parami rozłącznych kul w $\mathcal{B}$ o promieniach większych od R_k i zawierającą $\mathcal{A}_{k-1}$. Każda z rodzin $\mathcal{A}_k$ jest przeliczalna ze względu na ośrodkowość X.

Niech $\mathcal{A} = \bigcup \mathcal{A}_k = \{A_n : n \in \boldsymbol{N}\}$ i przypuśćmy, że $B \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{A}$ oraz $R_k < r_B \le R_{k-1}$. Wtedy dzięki maksymalności $\mathcal{A}_k$ istnieje kula $A_n = B(a_n, r_n) \in \mathcal{A}_{k-1}$, a więc o promieniu $r_n > R_k \ge \frac{2}{3} r_B$, taka że $B \cap A_n \ne 0$, skąd łatwo wynika że $B \subset A_n'$. Zatem $E \subset \bigcup A_n'$.

3.3. Niech $\mathcal{M}(\boldsymbol{R}^n)$ oznacza przestrzeń wszystkich funkcji mierzalnych. Mówimy, że odwzorowanie $T : L^p(\boldsymbol{R}^n) \to \mathcal{M}(\boldsymbol{R}^n)$ jest słabego typu (p,p), jeśli istnieje stała $C > 0$, taka że dla każdego $\alpha > 0$

$$|\{x \in \boldsymbol{R}^n : |T(f)(x)| > \alpha\}|^{1/p} \le \frac{C\|f\|_p}{\alpha}.$$

Warto w tym miejscu warto przypomnieć nierówność Kołmogorowa: Dla $f \ge 0$

$$|\{x \in \boldsymbol{R}^n : f(x) > \alpha\}|^{1/p} \le \frac{\|f\|_p}{\alpha}, \qquad 1 \le p < \infty.$$

Nierówność Kołmogorowa mówi, że odwzorowanie tożsamościowe jest słabego typu (p,p) dla $1 \le p < \infty$.

3.4. Operator

$$Mf(x) = \sup_{x\in B} \int_B |f(y)|\, dy$$

nazywamy *operatorem maksymalnym Hardy'ego-Littlewooda.*

3.5. Twierdzenie. Operator maksymalny Hardy'ego-Littlewooda jest słabego typu $(1,1)$.

3.6. Dowód: Niech $\alpha > 0$ i niech

$$E = \{x \in \boldsymbol{R}^n : Mf(x) > \alpha\}.$$

Z definicji, dla każdego $x \in E$ istnieje kula $B(x)$, taka że

$$|B(x)| < \alpha^{-1} \int_{B(x)} |f(y)|\, dy, \qquad |B(x)| \le \alpha^{-1}\|f\|_1.$$

Kule te stanowią pokrycie zbioru E. Na mocy lematu Wienera można wybrać spośród nich ciąg parami rozłącznych kul B_k, taki że

$$|E| \le 4^n \sum_k |B_k|,$$

skąd

$$|E| \le 4^n \sum_k \alpha^{-1} \int_{B_k} |f| \le \frac{4^n\|f\|_1}{\alpha}.$$

3.7. Twierdzenie Lebesgue'a. Niech f będzie funkcją lokalnie całkowalną na $\boldsymbol{R}^n$. a) Jeśli B_k jest ciągiem kul zawierających 0 o promieniach dążących do zera, to

$$\lim_{k\to 0} |B_k|^{-1} \int_{B_k} f(x+y)\, dy = f(x)$$

prawie wszędzie. b) Jeśli Q_k jest ciągiem kostek zawierających 0 o promieniach dążących do zera, to

$$\lim_{k\to 0} |Q_k|^{-1} \int_{Q_k} f(x+y)\, dy = f(x)$$

prawie wszędzie.

3.8. Dowód: Przez wybór odpowiedniej normy możemy ograniczyć się do przypadku kul. Niech

$$\Omega f(x) = \limsup_k |B|^{-1} \int_{B_k} |f(y) - f(x)|\, dy.$$

Chcemy udowodnić, że $\Omega f(x) = 0$ p.w. dla $f \in L^1(\boldsymbol{R}^n)$. Zauważmy, że tak jest, gdy f pochodzi z podprzestrzeni $C_c(\boldsymbol{R}^n)$, która jest gęsta w $L^1(\boldsymbol{R}^n)$. Zauważmy też, że

$$\Omega f(x) \le Mf(x) + |f(x)|,$$

a więc jest operatorem słabego typu $(1,1)$. Dla zadanego $\varepsilon > 0$ i $N > 0$ niech $\varphi \in C_c^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ i $\|f - \varphi\|_1 < \varepsilon/N$. Wtedy

$$\begin{aligned} |\{x \in \boldsymbol{R}^n : \Omega f(x) > 1/N\} &= |\{x \in \boldsymbol{R}^n : \Omega(f-\varphi)(x) > 1/N\}| \\ &\le CN\|f - \varphi\|_1 < C\varepsilon, \end{aligned}$$

co wobec dowolności ε i N pokazuje, że $\Omega f(x) = 0$ prawie wszędzie.

3.9. Interpolacja Marcinkiewicza. Niech $1 \le p < q \le \infty$. Niech $T : L^p(\boldsymbol{R}^n) + L^q(\boldsymbol{R}^n) \to \mathcal{M}(\boldsymbol{R}^n)$ będzie odwzorowaniem podaddytywnym, tzn. spełniającym warunek $|T(f+g)| \le |Tf| + |Tg|$. Jeśli T jest jednocześnie słabego typu (p,p) i (q,q), to dla każdego $p < r < q$ istnieje stała C_r, taka że

$$\|Tf\|_r \le C_r \|f\|_r.$$

Innymi słowy, T jest mocnego typu (r,r).

3.10. Wniosek. Operator maksymalny Hardy'ego-Littlewooda jest mocnego typu (p,p) dla każdego $1 < p \le \infty$.

4. Całki osobliwe. Teoria L^2

4.1. Niech $k : \boldsymbol{R}_n \setminus \{0\} \to \boldsymbol{C}$ będzie funkcją o własnościach:

a) $k(tx) = t^{-n}k(x), \qquad x \ne 0,\ t > 0,$

b) $\int_{1 \le |x| \le 2} k(x)\, dx = 0,$

c) k jest różniczkowalna w sposób ciągły.

Niech

$$\langle K, f\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \ge \varepsilon} k(y) f(y)\, dy$$

będzie dystrybucją wyznaczoną przez funkcję k. Dla $\varepsilon > 0$ niech

$$k_\varepsilon(x) = k(x)\chi_{|y| \ge \varepsilon}(x).$$

Jak widać, $k_\varepsilon \in L^2(\boldsymbol{R}^n)$. Mamy też

$$Kf = K \star f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} k_\varepsilon \star f(x)$$

dla $f \in \mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n)$ i $x \in \boldsymbol{R}^n$. Operatory tej postaci stanowią podstawowy model wszystkiego, co obejmuje się nazwą *osobliwych operatorów całkowych.* Będziemy się zajmować następującymi pytaniami:

1) Czy istnieje stała C, taka że

$$\|K \star f\| \le C\|f\|_2, \qquad f \in \mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n)\ ?$$

2) Czy istnieje stała C, taka że

$$\|K \star f\| \le C\|f\|_p, \qquad f \in \mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n)$$

dla $1 < p < \infty$?

3) Czy zachodzą zbieżności

$$k_\varepsilon \star f \to Kf, \qquad \varepsilon \to 0,$$

w normie L^p, gdy $f \in L^p(\boldsymbol{R}^n)$?

4) Czy zachodzą zbieżności

$$k_\varepsilon \star f \to Kf, \qquad \varepsilon \to 0,$$

p.w., gdy $f \in L^p(\boldsymbol{R}^n)$?

4.2. Z warunków a) i c) wynika *warunek Hörmandera*: Istnieje stała $B > 0$, taka że

$$\int_{|x|\geq 2|y|} |k(x+y) - k(x)|\, dx \leq B, \qquad y \in \boldsymbol{R}^n.$$

Rzeczywiście,

$$|k(x+y) - k(x)| \leq C\frac{|y|}{|x|^{n+1}}, \qquad |x| \geq 2|y|,$$

a więc

$$\int_{|x|\geq 2|y|} |k(x+y) - k(x)|\, dx \leq C|y| \int_{|x|\geq 2|y|} |x|^{-n-1}\, dx \leq B.$$

4.3. Twierdzenie. Operator liniowy $f \mapsto K\star f$ zadany początkowo na gęstej podprzestrzeni $\mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n)$ przedłuża się jednoznacznie do ciągłego operatora na przestrzeni $L^2(\boldsymbol{R}^n)$.

4.4. Dowód: Jako pierwszy krok dowodu pokażemy, że dla $f \in \mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n)$

$$K \star f = \lim_{\varepsilon\to 0} k_\varepsilon \star f$$

w normie przestrzeni $L^p(\boldsymbol{R}^n)$ dla $1 \leq p < \infty$. Istotnie, niech $0 < \varepsilon < \eta$. Niech

$$g_{\varepsilon,\eta}(x) = k_\varepsilon \star f(x) - k_\eta \star f(x) = \int_{\varepsilon\leq|y|\leq\eta} k(y)f(x-y)\, dy.$$

Oszacowanie dla $g_{\varepsilon,\eta}$ wyniknie z warunku skracania b). Rzeczywiście,

$$\begin{aligned} g_{\varepsilon,\eta}(x) &= \int_{\varepsilon\leq|y|\leq\eta} k(y)(f(x-y) - f(x))\, dy \\ &= -\int_0^1 \int_{\varepsilon\leq|y|\leq\eta} k(y)f'(x-ty)\cdot y\, dydt, \end{aligned}$$

skąd

$$\|g_{\varepsilon,\eta}\|_p \leq C\sum_{k=1}^n \|\partial_k f\|_p \int_{|y|\leq\eta} |y||k(y)|\, dy \to 0, \qquad \eta \to 0.$$

Widzimy zatem, ze ciąg $k_\varepsilon\star f$ jest fundamentalny, a zatem zbieżny w $L^p(\boldsymbol{R}^n)$, w szczególności w $L^2(\boldsymbol{R}^n)$. Jako że ciąg ten jest zbieżny punktowo do $K \star f$, cel został osiągnięty.

4.5. W tym punkcie przeprowadzimy drugą część dowodu. Pokażemy mianowicie, że transformaty Fouriera wszystkich funkcji

$$k_{\varepsilon,\eta}(x) = \begin{cases} k(x), & \varepsilon \leq |x| < \eta, \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku}, \end{cases}$$

są ograniczone w sposób niezależny od $0 < \varepsilon < \eta$. Aby to udowodnić, ustalmy $\xi \neq 0$. Wtedy

$$\widehat{k_\varepsilon}(\xi) = \int_{|x|\leq|\xi|^{-1}} e^{-2\pi ix\xi} k_{\varepsilon,\eta}(x)\, dx + \int_{|x|\geq|\xi|^{-1}} e^{-2\pi ix\xi} k_\varepsilon(x)\, dx = I_1(\xi) + I_2(\xi).$$

Oszacujmy najpierw całkę I_1. Korzystając z własności b), mamy

$$\begin{aligned} |I_1(\xi)| &\leq \left| \int_{|x|\leq|\xi|^{-1}} (e^{2\pi ix\xi} - 1)k_{\varepsilon,\eta}(x)\, dx \right| \\ &\leq C|\xi| \int_{|x|\leq|\xi|^{-1}} |x|^{-n+1}\, dx \leq C_1, \end{aligned}$$

gdzie stała C_1 nie zależy ani od ξ, ani od ε, η.

Aby oszacować drugą całkę, skorzystamy z tożsamości

$$\int e^{-2\pi ix\xi} f(x)\, dx = \frac{1}{2}\left(\int e^{-2\pi ix\xi} f(x)\, dx - \int e^{-2\pi ix\xi} f(x - z_\xi)\, dx \right),$$

gdzie $z_\xi = \frac{1}{2}|\xi|^{-2}\cdot\xi$. Zauważmy, że $|z_\xi| = \frac{1}{2}|\xi|^{-1}$. Mamy też

(*) $$|k_{\varepsilon,\eta}(x) - k_{\varepsilon,\eta}(x+y)| \leq |k(x) - k(x+y)| + |k_{\varepsilon/2,2\varepsilon}(x)| + |k_{\eta/2,2\eta}(x)|,$$

o ile $|x| \geq 2|y|$. W takim razie

$$(**)\qquad \begin{aligned} |I_2(\xi)| &\leq \frac{1}{2}\left|\int_{|x|\geq|\xi|^{-1}} e^{-2\pi i x\xi}(k_{\varepsilon,\eta}(x) - k_{\varepsilon,\eta}(x - z_\xi))\, dx\right| \\ &\leq \frac{1}{2}\int_{|x|\geq|\xi|^{-1}} |k(x) - k(x - z_\xi)|\, dx \\ &+ \frac{1}{2}\int |k_{\varepsilon/2,2\varepsilon}(x)|\, dx + \frac{1}{2}\int |k_{\eta/2,2\eta}(x)|\, dx, \end{aligned}$$

więc na mocy warunku Hörmandera

$$|I_2(\xi)| \leq B/2 = C_2 + 2\log 2,$$

co kończy dowód jednostajnej ograniczoności transformat Fouriera $\widehat{k_\varepsilon}$.

Widzimy więc, że operatory

$$K_\varepsilon f = k_\varepsilon \star f$$

są wspólnie ograniczone w normie na przestrzeni $L^2(\boldsymbol{R}^n)$ i jednocześnie zbieżne mocno do operatora $Kf = K \star f$ na pewnej gęstej podprzestrzeni. Stąd wynika nasza teza.

4.6. Uwaga. Wychodząc od (*) i zmieniając odpowiednio rachunek (**), a potem przechodząc z η do nieskończoności, pokazujemy, że

$$\int_{|x|\geq 2|y|} |k_\varepsilon(x + y) - k_\varepsilon(x)|\, dx \leq B,$$

gdzie B nie zależy od ε. Innymi słowy, jądra k_ε spełniają warunek Hörmandera jednostajnie.

5. Całki osobliwe. Teoria Calderóna-Zygmunda.

5.1. Lemat Calderóna-Zygmunda. Niech $f \geq 0$ będzie funkcją całkowalną i niech $\alpha > 0$. Istnieje wówczas domknięty podzbiór $F \subset \boldsymbol{R}^n$, taki że

$$f(x) \leq \alpha, \qquad x \in F,$$

oraz ciąg parami rozłącznych kostek Q_k, taki że

$$\alpha < |Q_k|^{-1}\int_{Q_k} f(x)\, dx \leq 2^n\alpha, \qquad \boldsymbol{R}^n \setminus F = \bigcup Q_k.$$

5.2. Dowód: Niech $Q_0 = (0,1)^n$ będzie kostką jednostkową i niech $\mathcal{Q}$ oznacza rodzinę wszystkich kostek postaci $2^k a + 2^k Q_0$, gdzie $a \in \boldsymbol{Z}^n$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Oznaczmy

$$f_Q = |Q|^{-1}\int_Q f(x)\, dx.$$

Niech

$$\Omega = \{x \in \boldsymbol{R}^n \mid \exists\, Q \in \mathcal{Q} : x \in Q \;\&\; f_Q > \alpha\}.$$

Ω jest zbiorem otwartym. Ponadto, dla każdego $x \in \Omega$ istnieje maksymalna kostka $Q = Q(x)$ o własności $f_Q > \alpha$, bo

$$|Q| < \alpha^{-1}\int_Q |f| \leq \alpha^{-1}\|f\|_1.$$

Oczywiście $Q(x) \subset \Omega$ i każde dwie takie kostki są albo identyczne, albo rozłączne. Zatem

$$\Omega = \bigcup Q_j, \qquad Q_j = Q(x_j),$$

gdzie suma jest rozłączna. Dla $Q = a + 2^k Q_0$ niech $Q' = a + 2^{k+1}Q_0$. Ponieważ dla danego $x \in Q_j$ kostka Q_j jest maksymalna,

$$\alpha \geq f_{Q_j'} \geq 2^{-n} f_{Q_j},$$

skąd nierówność

$$f_{Q_j} \leq 2^n\alpha.$$

Pozostaje zauważyć, że zbiór $F = \boldsymbol{R}^n \setminus \Omega$ jest domknięty i zawiera zbiór miary zero

$$Z = \bigcup_k \overline{Q_k} \setminus Q_k.$$

Jeśli $x \in F \setminus Z$, to

$$|Q|^{-1} \int f(y)\, dy \leq \alpha$$

dla wszystkich $Q \in \mathcal{Q}$ zawierających x, więc na mocy twierdzenia Lebesgue'a

$$f(x) \leq \alpha$$

dla p.w. $x \in F$.

5.3. Rozkład C-Z funkcji całkowalnej. Niech $f \in L^1(\boldsymbol{R}^n)$. Dla każdej liczby $\alpha > 0$ istnieje ciąg parami rozłącznych kostek (Q_k), takich że

$$\frac{1}{|Q_k|} \int_{Q_k} |f| > \alpha,$$

oraz przedstawienie

$$f = g + b = g + \sum_k b_k, \qquad g, b_k \in L^1(R^n),$$

gdzie

$$\|g\|_1 \leq \|f\|_1, \qquad |g| \leq 2^n \alpha,$$

a funkcje b_k mają nośniki w rozłącznych kostkach Q_k i następujące własności:

$$\frac{1}{|Q_k|} \int_{Q_k} |b_k| \leq 2^{n+1}\alpha, \qquad \int b_k = 0.$$

5.4. Dowód: Rzeczywiście, definiujemy

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in F, \\ f_{Q_k}, & x \in Q_k, \end{cases}$$

oraz

$$b_k(x) = \begin{cases} f(x) - f_{Q_k}, & x \in Q_k, \\ 0, & x \notin Q_k, \end{cases}$$

zgodnie z rozkładem C-Z funkcji $|f|$ dla liczby α.

5.5. Nadal rozważamy dystrybucję

$$\langle K, f\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} k(y) f(y)\, dy$$

wyznaczoną przez funkcję $k : \boldsymbol{R}_n \setminus \{0\} \to \boldsymbol{C}$ o własnościach:

a) $k(tx) = t^{-n} k(x)$,
b) $\int_{1 \leq |x| \leq 2} k(x)\, dx = 0$,
c) k jest różniczkowalna w sposób ciągły.

5.6. Twierdzenie. Dla każdego $\varepsilon > 0$ operator liniowy $f \mapsto K_\varepsilon f = k_\varepsilon \star f$ jest słabego typu $(1,1)$ ze stałą niezależną od ε.

5.7. Dowód: Niech $\alpha > 0$ i niech $f = g + b$ będzie rozkładem C-Z funkcji $f \in L^1(\boldsymbol{R}^n)$. Jeśli

$$E_\alpha(f) = \{x \in \boldsymbol{R}^n : |K_\varepsilon f(x)| > \alpha\},$$

to

$$E_\alpha(f) \subset E_{\alpha/2}(g) \cup E_{\alpha/2}(b),$$

więc wystarczy oszacować miary składników. W pierwszym przypadku wynika to łatwo z jednakowej ograniczoności K_ε na L^2. Rzeczywiście,

$$|E_{\alpha/2}| \leq 4\alpha^{-2} \|K_\varepsilon g\|_2^2 \leq 2^{n+2} C \alpha^{-1} \|g\|_1 \leq 2^{n+2} C \alpha^{-1} ||f\|_1,$$

gdzie C jest wspólnym ograniczeniem norm K_ε. W drugim przypadku wystarczy oszacować miarę zbioru

$$E' = E_{\alpha/2}(b) \setminus \Omega', \qquad \Omega' = \bigcup_k Q'_k,$$

bo

$$|\Omega'| = |\bigcup_k Q'_k| \leq 4^n \alpha^{-1} \|f\|_1.$$

Mamy

$$|E'| = |\{x \notin \Omega' : |K_\varepsilon b(x)| > \alpha/2\}| \leq 2\alpha^{-1} \int_{\boldsymbol{R}^n \setminus \Omega'} |K_\varepsilon b(x)|\, dx.$$

Jeśli teraz y_k jest środkiem kostki Q_k, to dzięki $\int b_k = 0$

$$\int_{\boldsymbol{R}^n \setminus \Omega'} |K_\varepsilon b(x)|\, dx \leq \sum_k \int_{\boldsymbol{R}^n \setminus Q'_k} \int |k_\varepsilon(x-y) - k_\varepsilon(x-y_k)||b_k(y)|\, dy\, dx.$$

Jako że $|x - y_k| \geq 2|y - y_k|$ dla $x \notin Q'_k$ i $y, y_k \in Q_k$, a funkcje k_ε spełniają jednostajnie i warunek Hörmandera,

$$\begin{aligned}
\int_{\boldsymbol{R}^n \setminus \Omega'} |K_\varepsilon b(x)|\, dx &\leq \sum_k \int_{\boldsymbol{R}^n \setminus Q'_k} \int \left|k_\varepsilon\Big((x-y_k) - (y-y_k)\Big) - k_\varepsilon(x-y_k)\right||b_k(y)|\, dy\, dx \\
&\leq \sum_k \int \int_{|x| \geq 2|y|} |k_\varepsilon(x-y) - k_\varepsilon(x)|\, dx |b_k(y+y_k)|\, dy \\
&\leq B \sum_k \|b_k\|_1 \leq 2^{n+1} B \|f\|_1,
\end{aligned}$$

co daje

$$|E'| \leq 2^{n+1} B \alpha^{-1} \|f\|_1.$$

5.8. Wniosek. Operatory liniowy $Kf = K \star f$ zadany początkowo na gęstej podprzestrzeni $\mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n)$ jest ograniczony w normie $L^p(\boldsymbol{R}^n)$ dla każdego $1 < p < \infty$, a zatem przedłuża się jednoznacznie do ciągłego operatora liniowego na tej przestrzeni.

6. Operatory liniowe translacyjnie niezmiennicze

6.1. Niech $L : \mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n) \to C^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ będzie ciągłym odwzorowaniem translacyjnie niezmienniczym. Istnieje wtedy dystrybucja T, taka że $Lf = T \star f$.

Rzeczywiście, prosty rachunek pokazuje, że jeśli

$$\langle T, f\rangle = Lf(0),$$

to

$$Lf(x) = \widetilde{T} \star f(x), \qquad \langle \widetilde{T}, f\rangle = \int f(-x) T(dx).$$

6.2. Jeśli μ jest miarą borelowską ograniczoną, to odwzorowanie $L^1(\boldsymbol{R}^n) \ni f \mapsto \mu \star f \in L^1(\boldsymbol{R}^n)$ jest ciągłe. Każde ciągłe odwzorowanie liniowe translacyjnie niezmiennicze przestrzeni $L^1(\boldsymbol{R}^n)$ jest tej postaci.

6.3. Jeśli K jest dystrybucją, taką że $\widehat{K} \in L^\infty(\boldsymbol{R}^n)$, to odwzorowanie $L^2(\boldsymbol{R}^n) \ni f \mapsto T \star f \in L^2(\boldsymbol{R}^n)$ jest ciągłe. Każde ciągłe odwzorowanie liniowe translacyjnie niezmiennicze $L^2(\boldsymbol{R}^n)$ jest tej postaci.

6.4. W ogólnym przypadku $1 \leq p < \infty$ dysponujemy łatwym warunkiem koniecznym: Jeśli L jest translacyjnie niezmienniczym odwzorowaniem liniowym $L^p(\boldsymbol{R}^n)$ dla pewnego $1 \leq p < \infty$, to L jest splotem z dystrybucją o ograniczonej transformacie Fouriera. Wszelkie warunki dostateczne są już trudne.

6.5. Twierdzenie mnożnikowe Hörmandera. Jeśli T jest dystrybucją temperowaną, taką, że $\widehat{T}(\xi) = m(\xi)$ jest funkcją różniczowalną k-krotnie, gdzie $k > n/2$, i spełniającą oszacowania

$$|D^\alpha_\xi m(\xi)| \leq C|\xi|^{-|\alpha|}, \qquad |\alpha| \leq k,$$

to operator liniowy $f \mapsto T \star f$ jest ograniczony na $L^p(\boldsymbol{R}^n)$ dla każdego $1 < p < \infty$.

6.6. Twierdzenie mnożnikowe Marcinkiewicza. Jeśli T jest dystrybucją temperowaną, taką, że $\widehat{T}(\xi) = m(\xi)$ jest funkcją klasy C^1 spełniającą oszacowania

$$|D_\xi^\alpha m(\xi)| \le C \prod_{j=1}^n |\xi_j|^{-\alpha_j}, \qquad \alpha \in \{0,1\}^n,$$

to operator liniowy $f \mapsto T \star f$ jest ograniczony na $L^p(\boldsymbol{R}^n)$ dla każdego $1 < p < \infty$.

6.7. Jeśli $n = 1$, to twierdzenie Marcinkiewicza i twierdzenie Hörmandera mówią to samo. Klasycznym przykładem mnożnika m spełniającego założenia obu twierdzeń jest transformata Fouriera dystrybucji Hilberta. W tym przypadku jednak prawdziwa jest mocniejsza wersja twierdzenia Marcinkiewicza:

Twierdzenie. Jeśli $|m(\xi)| \le B$ oraz $\int_{2^k \le |\xi| \le 2^{k+1}} |dm(\xi)| \le B$ niezależnie od $k \in \boldsymbol{Z}$, to operator

$$Tf(x) = \int e^{2\pi i x\xi} m(\xi) \widehat{f}(\xi)\, d\xi$$

jest ograniczony na $L^p(\boldsymbol{R})$ dla $1 < p < \infty$.

6.8. Przykład. Funkcja charakterystyczna odcinka jednostkowego $[-1, 1] \subset \boldsymbol{R}$ jest mnożnikiem Marcinkiewicza, a odpowiadające jej jądro to

$$k(x) = \int_{-1}^1 e^{2\pi i x\xi}\, d\xi = \frac{\sin 2\pi x}{2\pi x}.$$

Tymczasem twierdzenie Feffermana mówi, że funkcja charakterystyczna koła jednostkowego $\xi_1^2 + \xi_2^2 \le 1$ w $\boldsymbol{R}^2$ nie jest mnożnikiem dla żadnego $L^p(\boldsymbol{R}^2)$, $1 \le p < \infty$ (patrz Stein [5], X.2.5).

6.9. ZADANIE DOMOWE. Korzystając z wyłożonej teorii i podanej literatury, udowodnij że operator maksymalny

$$K^\star f(x) = \sup_{\varepsilon > 0} |k_\varepsilon \star f(x)|$$

jest słabego typu $(1, 1)$. Wyciągnij stąd wniosek o istnieniu granicy $\lim_{\varepsilon \to 0} k_\varepsilon \star f(x)$ dla prawie wszystkich $x \in \boldsymbol{R}^n$, jeśli $f \in L^p(\boldsymbol{R}^n)$, $1 \le p < \infty$.