Część II: Grupy Liego

Polecana literatura:

1. N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, rozdziały 1,2 i 3.
2. J. Gancarzewicz, Geometria różniczkowa, rozdz. 2 i 3,
3. B.C. Hall, An elementary introduction to group representations, rozdz. 1-4,
4. S. Helgason, Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces, rozdz. 1 i 2,
5. M.A. Naimark, Teorija predstavlenij grupp (Theory of group representations), rozdz. 11.1,
6. W. Wojtyński, Grupy i algebry Liego, rozdz. 4 i 5,

1. Pola wektorowe

1.1. Niech M będzie rozmaitością różniczkowalną. Funkcjonał liniowy ξ na $C^\infty(M)$ nazywamy *różniczkowaniem w punkcie* $a \in M$, jeśli

$$\xi(fg) = \xi(f)g(a) + f(a)\xi(g), \qquad f, g \in C^\infty(M).$$

Przestrzeń liniową wszystkich takich funkcjonałów nazywamy *przestrzenią styczną* do M w punkcie a i oznaczamy przez $T_a(M)$.

Odwzorowanie liniowe $X : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ nazywamy *różniczkowaniem algebry* $C^\infty(M)$, jeśli spełnia ono warunek

$$X(fg) = X(f)g + fX(g), \qquad f, g \in C^\infty(G).$$

Przestrzeń liniową wszystkich różniczkowań oznaczamy przez $\mathcal{X}(M)$.

1.2. Jeśli $X \in \mathcal{X}(M)$, to dla każdego $a \in M$

$$X_a(f) = Xf(a), \qquad f \in C^\infty(M),$$

jest wektorem stycznym w a, $X_a \in T_a(M)$. Dlatego różniczkowania nazywamy również *polami wektorowymi.*

1.3. Niech $F : M \to N$ będzie gładkim odwzorowaniem rozmaitości różniczkowalnych. *Pochodną* F *w punkcie* $a \in M$ nazywamy odwzorowanie liniowe

$$F'(a) : T_a(M) \to T_{F(a)}(N)$$

zadane wzorem

$$(F'(a)\xi)(f) = \xi(f \circ F), \qquad \xi \in T_a(M).$$

W szczególności, jeśli $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ jest gładką krzywą, to

$$\frac{d}{dt}\gamma(t)\Big|_{t=0} = \gamma'(0) \cdot 1 = \xi_{\gamma(0)} \in T_{\gamma(0)}(M),$$

gdzie

$$\xi_{\gamma(0)} f = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(\gamma(t)), \qquad f \in C^\infty(M).$$

1.4. Jeśli $M = U$ jest otwartym podzbiorem $\boldsymbol{R}^n$, to dla każdego $a \in U$ i każdego $\xi \in T_a(M)$ istnieje wektor $u \in \boldsymbol{R}^m$, taki że

$$\xi(f) = f'(a)u = \partial_u f(a) = \sum_{k=1}^n u_k \partial_k f(a), \qquad f \in C^\infty(U).$$

Ponadto

$$u_k = \xi(I_k), \qquad I_k(x) = x_k.$$

Odpowiedniość $\xi \mapsto u$ jest liniowa i wzajemnie jednoznaczna. Widać stąd, że $\dim T_a(U) = n$.

Każde pole wektorowe na U ma postać

$$X = \sum_{k=1}^n u_k \partial_k,$$

gdzie $u_k = X(I_k)$ są funkcjami gładkimi.

Niech teraz M będzie rozmaitością, V jej podzbiorem otwartym, a $\varphi : V \to \varphi(V) = U \subset \boldsymbol{R}^n$ mapą. Zauważmy, że $\varphi : V \to U$ jest dyfeomorfizmem. Jeśli $X \in \mathcal{X}(M)$, to

$$X = \sum_k a_k \partial_k^\varphi$$

na zbiorze V, gdzie

$$\partial_k^\varphi(x) = (\varphi^{-1})'(\varphi(a))\partial_k(a), \qquad a_k = X(\varphi_k) \in C^\infty(M).$$

Widzimy zatem, że wymiar przestrzeni stycznej $T_a(M)$ jest zawsze równy wymiarowi rozmaitości.

1.5. Niech X będzie polem wektorowym na rozmaitości różniczkowalnej M. Dla każdego $a \in M$ istnieje otoczenie U_a, $\varepsilon_a > 0$ i odwzorowanie

$$(-\varepsilon_a, \varepsilon_a) \times U_a \ni (t, x) \mapsto \varphi_t(x) \in M, \tag{*}$$

takie że dla każdej funkcji $f \in C^\infty(M)$

$$\frac{d}{dt} f\Big(\varphi_t(x)\Big) = Xf\Big(\varphi_t(x)\Big), \qquad \varphi_0(x) = x,$$

dla $x \in U_a$ oraz $|t| < \varepsilon_a$, a ponadto

$$\varphi_t \circ \varphi_s(x) = \varphi_{t+s}(x),$$

o ile $t, s, t+s \in (-\varepsilon_a, \varepsilon_a)$ i $\varphi_s(x) \in U_a$. Jeśli istnieje jeden wspólny $\varepsilon > 0$ dla wszystkich $a \in M$, to odwzorowanie (*) przedłuża się jednoznacznie na $\boldsymbol{R} \times M$.

Odwzorowanie φ nazywamy *potokiem fazowym* pola X. Rodzina odwzorowań $x \mapsto \varphi_t(x)$ to *lokalna grupa dyfeomorfizmów* pola X, a krzywe $t \mapsto \varphi_t(x)$ to *krzywe całkowe* pola X.

1.6. Niech X, Y będą polami wektorowymi na M. Wtedy

$$[X, Y] = XY - YX$$

jest także polem wektorowym. Działanie

$$(X, Y) \mapsto [X, Y]$$

określone na $\mathcal{X}(M)$ jest dwuliniowe antysymetryczne i spełnia tożsamość Jacobiego:

$$\Big[[X, Y], Z\Big] = \Big[[X, Z\Big], Y] + \Big[X, [Y, Z]\Big].$$

Mówimy, że $\mathcal{X}(M)$ spełnia aksjomaty *algebry Liego*.

2. Odwzorowanie eksponencjalne

2.1. *Grupą Liego* nazywamy rozmaitość różniczkowalną wyposażoną w strukturę grupy, w taki sposób że działanie

$$G \times G \ni (x, y) \mapsto x^{-1}y \in G$$

jest klasy C^∞.

2.2. Wśród pól wektorowych na grupie Liego G wyróżniamy pola *lewostronnie niezmiennicze*, tj. takie że

$$X(f_a) = (Xf)_a,$$

gdzie $f_a(x) = f(ax)$. Pola te tworzą podalgebrę Liego $\mathfrak{g}$ algebry Liego $\mathcal{X}(G)$, zwaną *algebrą Liego grupy Liego* G. Odwzorowanie

$$\mathfrak{g} \ni X \mapsto X_e \in T_e(G)$$

jest izomorfizmem przestrzeni liniowych $\mathfrak{g}$ i $T_e(G)$.

2.3. Niech $X \in \mathfrak{g}$. Każda krzywa całkowa $t \mapsto \varphi_t(e)$ pola X przedłuża się do homomorfizmu

$$\boldsymbol{R} \ni t \mapsto \gamma(t) \in G.$$

Aby to udowodnić, zauważmy najpierw, że jeśli $(-\varepsilon, \varepsilon) \ni t \mapsto \varphi_t(e) \in G$ jest krzywą całkową pola X wychodzącą z e, to $(-\varepsilon, \varepsilon) \ni t \mapsto a\varphi_t(e)$ jest takąż krzywą wychodzącą z punktu a. Zatem $\varepsilon = \varepsilon_a$ dla wszystkich $a \in G$ i na mocy (1.5) krzywe całkowe są globalne. Niech

$$\gamma(t) = \varphi_t(e), \qquad t \in \boldsymbol{R}.$$

Z powyższego widać, że

$$a\gamma(t) = \varphi_t(a),$$

więc po podstawieniu $a = \gamma(s)$ otrzymujemy

$$\gamma(s)\gamma(t) = \varphi_t(\gamma(s)) = \varphi_t(\varphi_s(e)) = \varphi_{t+s}(e) = \gamma(t+s).$$

2.4. Globalną krzywą całkową γ_X pola X wychodzącą z punktu e nazywamy *jednoparametrową podgrupą* grupy G wzdłuż pola X i tradycyjnie oznaczamy

$$\exp tX = \gamma_X(t).$$

W ten sposób definiujemy odwzorowanie

$$\mathfrak{g} \ni X \mapsto \exp X \in G,$$

które jest klasy C^∞.

2.5. Współrzędne kanoniczne pierwszego rodzaju:. Istnieje otoczenie zera U w algebrze Liego $\mathfrak{g}$, takie że $\exp(U)$ jest otwartym otoczeniem e w G oraz

$$\exp : U \to \exp(U)$$

jest dyfeomorfizmem. Wynika to stąd, że

$$\exp'(0)Z = Z_e.$$

Rzeczywiście, dla $Z \in \mathfrak{g}$

$$\Big(\exp'(0)Z\Big)(f) = Z(f \circ \exp)(0) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(\exp tZ) = Z_e(f).$$

2.6. Na ogół odwzorowanie exp nie jest ani injektywne, ani surjektywne. Jest jednak klasa grup Liego zwanych *eksponencjalnymi*, dla których $\exp : \mathfrak{g} \to G$ jest bijekcją, a więc dyfeomorfizmem. Należą do niej wszystkie nilpotentne (spójne i jednospójne) grupy Liego i część rozwiązalnych grup Liego.

2.7. Wzór Taylora. Niech $X \in \mathfrak{g}$. Wtedy dla małych $t \in \boldsymbol{R}$

$$f(\exp tX) = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k f(e)}{k!} t^k + \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (1-s)^{n-1} X^n f(\exp sX)\, ds.$$

Podobnie, dla małych X

$$f(\exp X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k f(e)}{k!} + \mathrm{o}\,(|X|^n). \tag{*}$$

Mamy też

$$\begin{aligned} f(\exp tX \exp sY) &= f(e) + tXf(e) + sYf(e) \\ &\quad + \frac{1}{2}t^2X^2f(e) + tsXYf(e) + \frac{1}{2}s^2Y^2f(e) + \mathrm{o}\,(t^2+s^2). \end{aligned}$$

2.8. Stwierdzenie. Dla $X, Y \in \mathfrak{g}$ dostatecznie bliskich zera

$$\exp X \exp Y = \exp\Big(X + Y + \frac{1}{2}[X,Y] + \mathrm{o}\,(|X|^2 + |Y|^2)\Big).$$

2.9. Dowód: Dla ustalonych $X, Y \in \mathfrak{g}$ i dostatecznie małych $t, s \in \boldsymbol{R}$ niech

$$Z(t) = \exp^{-1}\{\exp tX \exp tY\},$$

tak że

$$\exp tX \exp tY = \exp Z(t).$$

Dążymy do pokazania, że

$$Z(t) = tX + tY + \frac{1}{2}t^2[X, Y] + \mathrm{o}\,(t^2).$$

Dla $f \in C^\infty(G)$ mamy

$$\begin{aligned} f(\exp tX \exp tY) &= f(e) + tXf(e) + tYf(e) \\ &+ \frac{1}{2}t^2X^2f(e) + t^2XYf(e) + \frac{1}{2}t^2Y^2f(e) + \mathrm{o}\,(t^2). \end{aligned}$$

Z drugiej strony na mocy wzoru Taylora (*) i rozwinięcia

$$Z(t) = Z_1 t + \frac{1}{2}Z_2 t^2 + \mathrm{o}\,(t^2),$$

mamy

$$f(\exp Z(t)) = f(e) + Z(t)f(e) + \frac{1}{2}Z(t)^2 f(e) + \mathrm{o}\,(|Z(t)|^2),$$

a więc

$$f(\exp Z(t)) = Z_1 f(e) t + \frac{1}{2}(Z_1^2 + \frac{3}{2}Z_2) f(e) t^2 + \mathrm{o}\,(t^2),$$

skąd przez porównanie

$$Z_1 = X + Y, \qquad Z_2 = [X, Y].$$

2.10. Wniosek. Dla $X, Y \in \mathfrak{g}$

$$\exp(X + Y) = \lim_n (\exp X/n \exp Y/n)^n$$

oraz

$$\exp[X, Y] = \lim_n (\exp X/n, \exp Y/n)^{n^2}.$$

2.11. Współrzędne kanoniczne drugiego rodzaju: Niech $\{E_k\}_{k=1}^n$ będzie bazą $\mathfrak{g}$ i niech

$$\Psi(\sum_{k=1}^n x_k E_k) = \exp x_1 E_1 \exp x_2 E_2 \ldots \exp x_n E_n.$$

Wtedy istnieje otoczenie zera V w $\mathfrak{g}$, takie że $\Psi(V)$ jest otwarte oraz

$$\Psi : V \to \Psi(V)$$

jest dyfeomorfizmem.

Aby to udowodnić, przyjmijmy najpierw, że $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$. Niech

$$F(X_1 + X_2) = \exp X_1 \exp X_2, \qquad X_1 \in \mathfrak{g}_1, X_2 \in \mathfrak{g}_2.$$

Zatem, jeśli $X = X_1 + X_2$, to

$$F(X) = \exp(X_1 + X_2 + \mathrm{o}\,(|X_1| + |X_2|)) = \exp(X + \mathrm{o}\,(|X|)),$$

a więc $F'(0) = \exp'(0)$ i odwzorowanie F spełnia naszą tezę. W ten sposób przez indukcję pokazujemy, że $\Psi'(0) = \exp'(0)$.

3. Homomorfizmy

3.1. Lemat. Jeśli $\gamma : \boldsymbol{R} \to G$ jest ciągłym homomorfizmem, to istnieje pole $X \in \mathfrak{g}$, takie że
$$\gamma(t) = \exp tX.$$

3.2. Dowód: Niech $U = \exp V$ będzie kanonicznym otoczeniem jedności pierwszego rodzaju. Wybierzmy otoczenia $U_1 = \exp V_1$, tak aby $V_1 + V_1 \subset V$ i $U_1^2 \subset U$. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $\gamma(t) \in U_1$ dla $|t| \leq 1$. Niech $X, Y \in V_1$ będą takie, że $\exp X = \gamma(1)$, $\exp Y = \gamma(1/2)$. Wtedy
$$\exp X = (\exp Y)^2 = \exp 2Y,$$
więc $Y = X/2$. Przez łatwą indukcję, $\gamma(t/2^k) = \exp X/2^k$, więc także
$$\gamma(t) = \exp tX$$
najpierw dla wymiernych, a przez ciągłość już dla wszystkich $|t| \leq 1$. To oczywiście pociąga równość dla $t \in \boldsymbol{R}$.

3.3. Twierdzenie. Niech $\varphi : G \to H$ będzie ciągłym homomorfizmem grup Liego. Istnieje wtedy homomorfizm $\Phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ algebr Liego, taki że
$$\exp \Phi(X) = \varphi(\exp X), \qquad X \in \mathfrak{g}.$$
W szczególności $\varphi \in C^\infty(G, H)$ i
$$\varphi'(e)X = \Phi(X).$$
W ostatniej równości utożsamiliśmy algebrę Liego $\mathfrak{g}$ z przestrzenią styczną $T_e(G)$.

3.4. Dowód: Dla dowolnego $X \in \mathfrak{g}$
$$\gamma(t) = \varphi(\exp tX)$$
jest ciągłym homomorfizmem z $\boldsymbol{R}$ w H, więc dla jednoznacznie wyznaczonego $\Phi(X) \in \mathfrak{h}$

(#)
$$\varphi(\exp tX) = \exp t\Phi(X), \qquad t \in \boldsymbol{R}.$$
W ten sposób zdefiniowaliśmy przekształcenie $\Phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$. Pokażemy teraz, że jest ono homomorfizmem algebr Liego. Przede wszystkim z definicji widać, że
$$\Phi(tX) = t\Phi(X), \qquad X \in \mathfrak{g},\ t \in \boldsymbol{R}.$$
Niech teraz $X, Y \in \mathfrak{g}$, $t \in \boldsymbol{R}$. Mamy
$$\begin{aligned}\exp\Big(\Phi(X) + \Phi(Y)\Big) &= \lim_n \Big(\exp \Phi(X)/n \exp \Phi(Y)/n\Big)^n\\ &= \lim_n \Big(\varphi(\exp X/n \exp Y/n\Big)^n = \lim_n \varphi\Big(\exp X/n + Y/n + \mathrm{o}\,(1/n)\Big)^n\\ &= \lim_n \varphi(\exp(X + Y + \mathrm{o}\,(1)) = \varphi(\exp(X+Y)) = \exp \Phi(X+Y),\end{aligned}$$
skąd wynika, że
$$\Phi(X+Y) = \Phi(X) + \Phi(Y)$$
dla małych $X, Y \in \mathfrak{g}$. Ale Φ jest jednorodne, więc własność addytywności rozszerza się na wszystkie wekotory $X, Y \in \mathfrak{g}$. Aby wykazać, że
$$\Phi([X,Y]) = [\Phi(X), \Phi(Y)]$$
rozumujemy podobnie:
$$\begin{aligned}\exp[\Phi(X), \Phi(Y)]\Big) &= \lim_n \Big(\exp \Phi(X)/n, \exp \Phi(Y)/n\Big)^{n^2}\\ &= \lim_n \Big(\varphi(\exp X/n, \exp Y/n\Big)^{n^2} = \lim_n \varphi\Big(\exp[X/n, Y/n] + \mathrm{o}\,(1/n^2)\Big)^{n^2}\\ &= \lim_n \varphi(\exp([X,Y] + \mathrm{o}\,(1)) = \varphi(\exp[X,Y]) = \exp \Phi[X,Y],\end{aligned}$$
skąd wynika, że
$$\Phi[X,Y] = [\Phi(X), \Phi(Y)]$$

dla małych $X, Y \in \mathfrak{g}$. Ale Φ jest jednorodne, więc własność Liego rozszerza się na wszystkie wekotory $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Ze wzoru (#) wynika, że

$$\exp^{-1} \circ \varphi \circ \exp(X) = \Phi(X)$$

w pewnym otoczeniu zera w $\mathfrak{g}$, co pokazuje, że φ jest gładkie w otoczeniu jedności. Ten sam wzór (#) pokazuje, że

$$\varphi'(e)X_e = \varphi'(e)X = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\varphi(\exp tX),$$

więc $\exp(\varphi'(e)X) = \varphi(\exp tX)$, a stąd $\varphi'(e)X = \Phi(X)$.

4. Pełna grupa liniowa i jej podgrupy

4.1. Niech $L(n)$ oznacza przestrzeń liniową wszystkich przekształceń liniowych $\boldsymbol{R}^n$, a $GL(n)$ grupę przekształceń nieosobliwych. Niech $A \in L(n)$. Wtedy $t \to e^{tA}$ jest grupą jednoparametrową w $GL(n)$, a odpowiadające jej pole wektorowe to

$$X_A(f)(g) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(ge^{tA}).$$

Na odwrót, dla każdego pola $X \in \mathfrak{g}$ istnieje $A_X \in L(n)$, taka że

$$Xf(g)(f)(g) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(ge^{tA_X}).$$

Przyporządkowanie

$$\mathfrak{gl}(n) \ni X \mapsto A_X \in L(n)$$

jest liniowe, a więc jest izomorfizmem. Możemy zatem uważać $L(n)$ za algebrę Liego grupy $GL(n)$, a odwzorowanie wykładnicze $A \mapsto \mathrm{Exp}\,(A) = e^A$ utożsamić z odwzorowaniem eksponencjalnym exp. Mamy bowiem

$$\exp X = e^{A_X}, \qquad X \in \mathfrak{gl},$$

co zilustrowano na poniższym diagramie:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{gl}(n) \arrow[r, "\exp"] \arrow[dr, "X \mapsto A_X"] & GL(n) \\ & L(n) \arrow[u, "\mathrm{Exp}"'] \end{tikzcd}$$

4.2. Mówimy, że rozmaitość N zawarta w rozmaitości M jest *podrozmaitością* M, jeśli N jest podprzestrzenią topologiczną M, a odwzorowanie

$$N \ni x \mapsto x \in M$$

jest gładkie i regularne (maksymalnego rzędu).

4.3. Uwaga. Niech N będzie podzbiorem rozmaitości M. Na N może istnieć co najwyżej jedna struktura podrozmaitości M. Jeśli dla każdego punktu $a \in N$ istnieje otoczenie otwarte W, takie że $N \cap W$ jest podrozmaitością W ustalonego wymiaru, to N jest podrozmaitością M tego wymiaru.

4.4. Mówimy, że podgrupa H grupy Liego G jest podgrupą Liego, jeśli H jest podrozmaitością G. Jest jasne, że podgrupa Liego sama jest grupą Liego.

4.5. Twierdzenie Cartana. Każda domknięta podgrupa G grupy $GL(n)$ jest grupą Liego, a jej podalgebrę Liego można utożsamić z

$$LG = \{A \in L(n) : e^{tA} \in G \text{ dla } t \in \boldsymbol{R}\}.$$

4.6. Dowód: Zacznijmy od tego, że LG jest algebrą Liego, co wynika wprost z Wniosku 2.10 i definicji.

Najważniejsze teraz to pokazać, że istnieje otoczenie zera $U \subset LG$, takie że $\operatorname{Exp}(U)$ jest otoczeniem jedności $I \in G$. Przypuśćmy nie wprost, że tak nie jest. Istnieje wtedy ciąg $Y_n \notin LG$, taki że $e^{Y_n} \in G$ jest zbieżny do identyczności. Niech $L(n) = LG \oplus LG^{\perp}$ i niech

$$\Psi(A+B) = e^A e^B, \qquad A \in LG, B \in LG^{\perp}.$$

Wtedy $Y_n = X_n + Z_n$, gdzie $X_n \in LG$, $Z_n \in LG^{\perp}$ oraz $X_n \to 0$, $Z_n \to 0$. Ponadto

$$e^{Z_n} = e^{-X_n} e^{Y_n} \in G.$$

Bez straty ogólności możemy przyjąć, że ciąg $S_n = Z_n/|Z_n|$ jest zbieżny do $S_0 \in LG^{\perp}$. Pokażemy, że S_0 należy także do LG, co jest niedorzecznością, bo wtedy $S_0 \in LG \cap LG^{\perp}$ oraz $|S_0| = 1$.

Jako że $|Z_n| \to 0$, istnieje ciąg $m_n \in \boldsymbol{Z}$, taki że $m_n|Z_n| \to t$. Wtedy

$$\left(e^{Z_n}\right)^{m_n} = e^{m_n|Z_n|S_n} \to e^{tS_0},$$

więc wobec domkniętości G i dowolności t widzimy, że $S_0 \in LG$.

Niech teraz W będzie małym otoczeniem kanonicznym zera (pierwszego rodzaju) w $L(n)$. Niech $a \in G$. Niech $\varphi_a : U \to V_a = a\operatorname{Exp}(W)$ będzie zadane wzorem $\varphi_a(X) = a\operatorname{Exp}(X)$ dla $X \in W$. Wtedy φ_a jest dyfeomorfizmem oraz

$$\varphi_a^{-1}(aV \cap G) = W \cap LG,$$

a więc $aV \cap G$ jest podrozmaitościa aV. Na mocy Uwagi 4.3 grupa G jest podrozmaitością, a stąd podgrupą Liego $GL(n)$.

5. Reprezentacja dołączona

5.1. Niech $\alpha_g : G \to G$ będzie automorfizmem wewnętrznym G, tzn.

$$\alpha_g(h) = ghg^{-1}, \qquad h \in G.$$

Niech

$$A_g = \alpha_g'(e) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$$

będzie odpowiadającym mu homomorfizmem algebry Liego. Jak łatwo widać,

$$A_{gh} = A_g A_h,$$

więc

$$G \ni g \mapsto A_g \in GL(\mathfrak{g})$$

jest homomorfizmem grup Liego $G \to GL(\mathfrak{g})$. Nosi on nazwę *reprezentacji dołączonej* grupy Liego. Znajdziemy odpowiadający mu homomorfizm (reprezentację dołączoną) algebr Liego $\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$. Jak się okaże, tym homomorfizmem jest

$$\mathfrak{g} \ni X \mapsto \operatorname{ad}_X \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) = L(\mathfrak{g}), \tag{5.2}$$

gdzie $\operatorname{ad}_X(Y) = [X, Y]$.

5.3. Twierdzenie. Mamy

$$A_{\exp X} = \exp(\operatorname{ad}_X) = e^{\operatorname{ad}_X}, \qquad X \in \mathfrak{g}.$$

5.4. Dowód: Z definicji

$$\alpha_{\exp tX}(\exp sY) = \exp\{A_{\exp tX} sY\} = \exp sA_{\exp tX}Y, \qquad t, s \in \boldsymbol{R}.$$

Lewa strona jest równa

$$L(s,t) = \exp\Big(s(Y + t[X,Y] + s^{-1}Z(t,s))\Big),$$

gdzie $Z(t,s) = \mathrm{o}(t^2 + s^2)$. Jako że $s \to \alpha_{\exp tX}(\exp sY)$ jest przy ustalonym t podgrupą jednoparametrową,

$$L(s,t) = \exp\Big(s(Y + t[X,Y] + Z(t))\Big),$$

gdzie $Z(t) = \mathrm{o}(t^2)$. Zatem dla małych s

$$Y + t[X,Y] + Z(t) = A_{\exp tX}(Y),$$

skąd po zróżniczkowaniu w punkcie $t = 0$

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} A_{\exp tX} Y = [X, Y] = \mathrm{ad}_X Y.$$

Mamy więc grupę operatorów liniowych $A_{\exp tX} = T_t \in L(\mathfrak{g})$, taką że $\frac{d}{dt}\big|_{t=0} T_t = \mathrm{ad}_X$. Z teorii zwyczajnych liniowych równań różniczkowych wynika że

$$A_{\exp tX} = e^{t\mathrm{ad}_X}.$$

5.5. Wniosek. Niech $X, Y \in \mathfrak{g}$. Wtedy

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \exp tX \exp sY \exp(-tX) = [X, Y].$$

Dowód. Faktycznie,

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \exp tX \exp sY \exp(-tX) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} A_{\exp tX} Y = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} e^{t\mathrm{ad}_X} Y = \mathrm{ad}_X(Y).$$

□

5.6. Wniosek. Pola niezmiennicze komutują, wtedy i tylko wtedy gdy ich grupy jednoparametrowe komutują.

5.7. Dowód: Niech $X, Y \in \mathfrak{g}$. Jeśli

$$\exp tX \exp sY = \exp sY \exp tX,$$

to z Wniosku 5.5 natychmiast wynika, że $[X, Y] = 0$.

Jeśli natomiast $[X, Y] = 0$, to dla każdego $t \in \boldsymbol{R}$ jest $Y = e^{t\mathrm{ad}_X} Y$ i z Twierdzenia 5.3 wynika, że

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \exp tX \exp sY \exp(-tX) = Y,$$

więc

$$s \mapsto \exp tX \exp sY \exp(-tX)$$

jest podgrupą jednoparametrową Y, czyli

$$\exp tX \exp sY \exp(-tX) = \exp sY, \qquad t, s \in \boldsymbol{R},$$

co stanowi naszą tezę.

6. Całkowanie algebr Liego

6.1. Twierdzenie 4.5 rozszerza się na przypadek dowolnej grupy Liego: *Jeśli H jest domkniętą podgrupą grupy Liego G, to jest podgrupą Liego grupy G. Jej algebra Liego $\mathfrak{h}$ jest wtedy podalgebrą algebry Liego $\mathfrak{g}$ scharakteryzowaną przez warunek*

$$\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} : \exp tX \in H \text{ dla } t \in \boldsymbol{R}\}.$$

6.2. O wiele trudniejszym pytaniem jest, czy dla każdej algebry Liego $\mathfrak{g}$ istnieje grupa Liego, dla której $\mathfrak{g}$ jest jej algebrą Liego. Odpowiedź brzmi: tak. Wniosek ten można wyprowadzić z twierdzenia Cartana 4.5 oraz następującego twierdzenia Ado: *Każda algebra Liego jest izomorficzna z pewną podalgebrą algebry Liego $L(n)$ dla odpowiednio dużego n.* Dowód twierdzenia Ado można znaleźć w książce N. Bourbaki, rozdz. 1.7.

6.3. Każda spójna i jednospójna grupa Liego jest izomorficzna jako grupa Liego z z pewną grupą macierzową, tj. z domkniętą podgrupą grupy $GL(n)$ dla odpowiedniego $n \in N$.

6.4. Zadanie. Niech $\boldsymbol{R}_d$ oznacza grupę addytywną prostej z topologią dyskretną. Pokaż, że $G = \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}_d$ jest jednowymiarową jednospójną grupą Liego, która nie jest izomorficzna z żadną grupą macierzową.

6.5. Zadanie. Pokaż, że grupa $G = \boldsymbol{R}^2 \times \mathbf{T}$, gdzie $\mathbf{T} = \{z \in \boldsymbol{C} : |z| = 1\}$, z mnożeniem

$$(x_1, y_1, z_1) \circ (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 z_2 e^{i(x_1 y_2 - y_1 x_2)})$$

nie jest izomorficzna z żadną grupą macierzową. **Wskazówka:** Skorzystaj z własności reprezentacji dołączonej.

6.6. Zadanie. Udowodnij twierdzenie Ado przy dodatkowym założeniu, że algebra Liego $\mathfrak{g}$ ma trywialne centrum. Zauważ, że wtedy właściwym homomorfizmem jest $X \mapsto \mathrm{ad}_X$ zdefiniowany wzorem (5.2).

6.7. Przypomnijmy, że *liczby Bernoulliego* pochodzą z rozwinięcia

$$h(z) = \frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} z^{2k}.$$

Liczby B_n są wymierne i można je otrzymać rekurencyjnie z tożsamości

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{B_k}{k!(n-k)!} = 0, \qquad B_0 = 1.$$

Inną podobną funkcją, która będzie nam potrzebna, jest

$$g(z) = \frac{z \log z}{z - 1}.$$

6.8. Wzór Campbella-Hausdorffa. Niech G będzie grupą Liego. Istnieje otoczenie zera U w algebrze Liego $\mathfrak{g}$, takie że dla $X, Y \in U$

$$\exp^{-1}\Big(\exp X \exp Y\Big) = \int_0^1 g(e^{\mathrm{ad}_X} e^{t\mathrm{ad}_Y}) Y \, dt.$$

Po rozwinięciu

$$\exp^{-1}(\exp X \exp Y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(X, Y),$$

gdzie szereg po prawej jest zbieżny w $\mathfrak{g}$, a jego wyrazy wyrażają się wzorami rekurencyjnymi

$$c_1(X, Y) = X + Y$$

oraz

$$\begin{aligned}(n+1)c_{n+1}(X, Y) &= \frac{1}{2}[X - Y, c_n(X, Y)] \\ &+ \sum_{2 \le 2p \le n} \frac{B_{2p}}{(2p)!} \sum_{\substack{m_1 + m_2 + \cdots + m_{2p} = n \\ m_j \ge 1}} \mathrm{ad}_{c_{m_1}(X,Y)} \ldots \mathrm{ad}_{c_{m_{2p}}(X,Y)}(X + Y).\end{aligned}$$

Mamy więc

$$\begin{aligned}\exp^{-1}\Big(\exp X \exp Y\Big) &= X + Y + \frac{1}{2}[X, Y] \\ &+ \frac{1}{12}\Big([X, [X, Y]] + [Y, [Y, X]]\Big) - \frac{1}{24}[X, [Y, [X, Y]]] + \ldots\end{aligned}$$

Dowód można znaleźć np. w książkach Bourbaki, Naimarka i Wojtyńskiego. Dowód dla grup macierzowych zawiera książka Halla. Najbardziej szczegółowe omówienie podaje Bourbaki.

6.9. Uwagi. Ze wzoru Campbella-Hausdorffa można wywnioskować, że mnożenie w grupie Liego jest w istocie działaniem analitycznym. Inny wniosek, jaki można wyciągnąć, to ten, że grupy mające tę samą algebrę Liego są lokalnie dyfeomorficzne.

6.10. Rozważmy algebrę nilpotentną stopnia 3 z mnożeniem Hausdorffa:

$$X \circ Y = X + Y + \frac{1}{2}[X, Y] + \frac{1}{12}[X, [X, Y]] + \frac{1}{12}[Y, [Y, X]].$$

Wtedy

$$\alpha_X(sY) = X \circ sY \circ (-X) = Y + s[X,Y] + \frac{1}{2}[X,[X,Y]] = se^{\mathrm{ad}_X}(Y),$$

a więc

$$A_X(Y) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \alpha_X(sY) = e^{\mathrm{ad}_X} Y = (I + \mathrm{ad}_X + \frac{1}{2}\mathrm{ad}_X^2)Y.$$

Nietrudno zauważyć, że dla dowolnej nilpotentnej algebry Liego z mnożeniem Hausdorffa

$$A_X(Y) = \exp A_X(Y) = \alpha_X(\exp Y) = \alpha_X(Y),$$

bo tutaj $\exp = I$.Ogólniej: *Homomorfizmy algebry Liego są homomorfizmami grupy i na odwrót.*

6.11. ZADANIE DOMOWE. Wyprowadź wzór

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} e^{X+tY} = e^X \left\{ \frac{I - e^{-\mathrm{ad}_X}}{\mathrm{ad}_X}(Y) \right\}$$

na pochodną kierunkową funkcji wykładniczej w punkcie X w kierunku wektora Y przy dodatkowym założeniu, że $(\mathrm{ad}_X)^N Y = 0$ dla pewnego $N \in \boldsymbol{N}$. (Patrz np. Hall, str. 59.)

6.12. ZADANIE DOMOWE (ALTERNATYWNE). Rozwiąż Zadanie 6.5.