Cz III: Analiza na grupie Heisenberga

Polecana literatura:

1. J. Dziubaski, Wstp do analizy harmonicznej na grupie Heisenberga (skrypt napisany wg. notatek F. Ricciego i dostpny na mojej stronie www),
2. G.B. Folland, Harmonic analysis in phase space, rozdz. 1,
3. E. Hewitt, K. Ross, Abstract harmonic analysis, tom I, rozdz. 4 i 5,
4. R. Howe, Quantum mechanics and partial differential operators, J. Func. Anal. 38 (1980), 188-254,
5. R. Howe, On the role of the Heisenberg group in harmonic analysis, Bull. Am. Math. Soc. (NS), vol 3, number 2 (1980), 821-843,
6. M. Siankowska, Relacje komutacyjne Heisenberga (praca magisterska dostpna na mojej stronie www),
7. K. Yosida, Functional analysis, rozdz. V, 4-5,

1. Grupa Heisenberga

1.1. *Grup Heisenberga* wymiaru $2n+1$ nazywamy grup $\mathbf{H}$ macierzy postaci

$$g = \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad x, y \in \boldsymbol{R}^n, z \in \boldsymbol{R},$$

ze zwykym mnoeniem macierzowym

$$g_1 g_2 = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & z_1 \\ 0 & 1 & y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_2 & z_2 \\ 0 & 1 & y_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 + x_2 & z_1 + z_2 + x_1 y_2 \\ 0 & 1 & y_1 + y_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

gdzie

$$x_1 y_2 = \sum_{k=1}^{n} x_1^k y_2^k$$

jest iloczynem skalarnym w $\boldsymbol{R}^n$.

1.2. Definiujemy rwnie $2n+1$-wymiarow przestrze liniow $L\mathbf{H}$ macierzy postaci

$$A = \begin{pmatrix} 0 & x & z \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad x, y \in \boldsymbol{R}^n, z \in \boldsymbol{R},$$

z komutatorem

$$[A, B] = AB - BA.$$

Nietrudno sprawdzi, e

$$[A_1, A_2] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x_1 y_2 - x_2 y_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

a take, e $L\mathbf{H}$ jest algebr Liego.

1.3. Odwzorowanie wykadnicze

$$\operatorname{Exp}(A) = e^A = I + A + \frac{1}{2} A^2 = \begin{pmatrix} 1 & x & z + xy \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

przeksztaca wzajemnie jednoznacznie algebr Liego $L\mathbf{H}$ na grup $\mathbf{H}$. W takim razie algebra $L\mathbf{H}$ jest izomorficzna z algebr Liego $\mathfrak{h}$ grupy $\mathbf{H}$.

1.4. Bezporednim rachunkiem sprawdza si, e

$$\exp^{-1}\Big(\exp X \exp Y\Big) = X + Y + \frac{1}{2}[X, Y], \qquad X, Y \in \mathfrak{h}.$$

1.5. W $\mathfrak{h}$ moemy wprowadzi dziaanie

$$X \circ Y = X + Y + \frac{1}{2}[X, Y].$$

Jeli oznaczymy

$$X_k = (x_k, y_k, z_k) \in \mathfrak{h},$$

to

$$X_1 \circ X_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2 + \frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1)).$$

Jak wida, $(\mathfrak{h}, \circ)$ jest grup izomorficzn z grup Heisenberga $(\mathbf{H}, \cdot)$, a odwzorowanie

$$\exp : \mathfrak{h} \to G$$

jest izomorfizmem.

1.6. Od tej pory bdziemy zajmowa si przestrzeni wektorow $\mathfrak{h} = W \times \boldsymbol{R}$, gdzie $W = \boldsymbol{R}^{2n}$, ktra jest algebr Liego z komutatorem

$$[X_1, X_2] = (0, 0, x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

i jednoczenie grup z mnoeniem

$$X_1 \circ X_2 = X_1 + X_2 + \frac{1}{2}[X_1, X_2].$$

Grupa ta jest izomorficzna z grup Heisenberga, a algebra Liego z algebr Liego grupy Heisenberga. Odwzorowanie eksponencjalne $\exp : \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}$ jest identycznoci, a podgrupy jednoparametrowe to $t \to tX$. Pole wektorowe odpowiadajce grupie jednoparametrowej $t \to tX$ to

$$\widetilde{X} f(Y) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(Y \circ tX).$$

Niech $\{X_j\}$, $\{Y_j\}$ bd bazami zero-jedynkowymi $\boldsymbol{R}^n$ i niech $Z = 1$ bdzie bazowym elementem $\boldsymbol{R}$. Wtedy

$$\begin{aligned}
\widetilde{X_k} f(x, y, z) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(x + t_k, y, z + t y_k) = D_{x_k} f(x, y, z) + \frac{1}{2} y_k D_z f(x, y, z), \\
\widetilde{Y_k} f(x, y, z) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(x, y + t_k, z - x_k t) = D_{y_k} f(x, y, z) - \frac{1}{2} x_k D_z f(x, y, z), \\
\widetilde{Z} f(x, y, z) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(x_k, y, z + t) = D_z f(x, y, z),
\end{aligned}$$

a w skrcie

$$\begin{aligned}
\widetilde{X_k} &= D_{x_k} + \frac{1}{2} y_k D_z, \\
\widetilde{Y_k} &= D_{y_k} - \frac{1}{2} x_k D_z, \\
\widetilde{Z} &= D_z.
\end{aligned}$$

1.7. Jeli elementy $\mathbf{H} = W \times \boldsymbol{R}$ oznaczymy przez (w, z), mnoenie przyjmuje posta

$$(w_1, z_1) \circ (w_2, z_2) = (w_1 + w_2, z_1 + z_2 + \frac{1}{2} < w_1, w_2 >),$$

gdzie

$$< w_1, w_2 >=< (x_1, y_1), (x_2, y_2) >= x_1 y_2 - x_2 y_1,$$

jest niezdegenerowan form symplektyczn na $W = \boldsymbol{R}^{2n}$.

2. Reprezentacje unitarne grup lokalnie zwartych

2.1. Niech bdzie dana przestrze Hilberta H i rodzina T_α ograniczonych operatorw na H. Mwimy, e rodzina T_α jest nieprzywiedlna, jeli kada domknita niezmiennicza podprzestrze wsplna dla operatorw T_α jest trywialna.

2.2. Kryterium nieprzywiedlnoci. Algebra z inwolucj (*-algebra) $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(H)$ jest nieprzywiedlna, wtedy i tylko wtedy gdy jedynymi operatorami komutujcymi z algebr s operatory postaci λI.

2.3. Dowd: Podprzestrze domknita V jest niezmiennicza dla operatora $A \in \mathcal{A}$, wtedy i tylko wtedy gdy rzut ortogonalny P_V komutuje z A. Std kryterium dziaa w przypadku rzutw ortogonalnych. Przez rozkad spektralny rozszerza si ono na operatory hermitowskie, a nastpnie bez trudu na dowolne.

2.4. Niech bd dane dwie rodziny operatorw ograniczonych: $\{T_\alpha\}$ na przestrzeni Hilberta H i $\{S_\alpha\}$ na przestrzeni Hilberta K. Mwimy, e operator $A : H \to K$ jest operatorem splatajcym te rodziny, jeli $AT_\alpha = S_\alpha A$ dla kadego α. Jeli taki operator istnieje i jest izomorfizmem, to mwimy e rodziny s rwnowane.

2.5. Niech bd dane dwie nieprzywiedlne rodziny operatorw unitarnych T_α na H oraz S_α na K zamknite na inwolucj $\star$. Jeli A jest operatorem $\star$-splatajcym, tzn.

$$AT_\alpha = S_\alpha A, \qquad AS_\alpha^\star = T_\alpha^\star A,$$

to $A = 0$ lub istnieje liczba $c \neq 0$, taka e $U = cA$ jest operatorem unitarnym.

2.6. Dowd: Z $AT_\alpha^\star = S_\alpha^\star A$ wynika, e $T_\alpha A^\star = A^\star S_\alpha$, a wic

$$T_\alpha A^\star A = A^\star S_\alpha A = A^\star A T_\alpha,$$

a zatem $A^\star A = c^2$. Jeli $c = 0$, to A jest operatorem zerowym. Jeli natomiast $c \neq 0$, to ma domknity obraz. Jako e $S_\alpha(\Im A) \subset \Im A$, A ma gsty obraz, a wic $\Im A = K$. Std $c^{-1}A$ jest operatorem unitarnym.

2.7. *Reprezentacj unitarn* grupy lokalnie zwartej G nazywamy mocno cigy homomorfizm π grupy G w grup operatorw unitarnych przestrzeni Hilberta H. Reprezentacja nazywa si nieprzywiedlna, jeli rodzina $\{\pi_x : x \in G\}$ jest nieprzywiedlna. Dwie reprezentacje unitarne s unitarnie rwnowane, jeli odpowiadajce im rodziny operatorw s rwnowane i operator splatajcy jest unitarny.

2.8. Niech $\mathcal{A}$ bdzie algebr Banacha z inwolucj. Cigy *-homomorfizm algebry $\mathcal{A}$ w algebr ograniczonych operatorw na przestrzeni Hilberta nazywamy **-reprezentacj $\mathcal{A}$*.

2.9. Stwierdzenie. Kada nieprzywiedlna reprezentacja unitarna π grupy lokalnie zwartej abelowej G jest jednowymiarowa. Jest zatem homomorfizmem G w grup koa $\mathbf{T}$.

2.10. Dowd: Niech π bdzie tak reprezentacj. Jako e grupa jest abelowa, mamy $\pi_x \pi_y = \pi_y \pi_x$ dla kadych $x, y \in G$. Na mocy Kryterium 2.2

$$\pi_x = \alpha(x) I, \qquad \alpha(x) \in \boldsymbol{C},$$

wic jako nieprzywiedlna reprezentacja jest jednowymiarowa.

2.11. Uwaga. W dowodzie poniszego twierdzenia skorzystamy z caek z funkcji cigych wzgldem skoczonych miar μ absolutnie cigych wzgldem miary Haara grupy G przyjmujcych wartoci w przestrzeni Banacha X. Przypomnijmy, e jeli Y jest drug przestrzeni Banacha, to

$$T\left(\int_G f(x)\,\mu(dx)\right) = \int_G T(f(x))\,\mu(dx)$$

dla kadego cigego odwzorowania liniowego $T : X \to Y$ (patrz np. Yosida, Corollary 2 na stronie 134).

2.12. Twierdzenie. Niech π bdzie reprezentacj unitarn grupy lokalnie zwartej G na przestrzeni Hilberta H. Wtedy wzr

$$\pi_f \xi = \int f(x) \pi_x \xi\, dx, \qquad f \in L^1(G),$$

definiuje operator ograniczony na H, taki e $\|\pi_f\| \le \|f\|_1$ oraz

$$\pi_{f\star g} = \pi_f \pi_g, \qquad \pi_{f^\star} = (\pi_f)^\star.$$

Otrzymujemy w ten sposb cig *-reprezentacj algebry grupowej $L^1(G)$ na H.

Z drugiej strony, jeli $f \mapsto B(f)$ jest cig *-reprezentacj algebry grupowej $L^1(G)$ na H, tak e

(*) $$\bigcap_{f\in L^1(G)} \ker B(f) = \{0\},$$

to istnieje reprezentacja unitarna π grupy G na H, taka e

$$B(f) = \pi_f, \qquad f \in L^1(G).$$

2.13. Dowd: Pierwsza cz twierdzenia jest nietrudna, wic skupimy si na drugiej. Z zaoenia (*) wynika, e wektory postaci $B(f)\xi$ le gsto w H. Oznaczmy t gst podprzestrze przez H_0. Definiujemy

$$\langle \pi_x \xi, B(f)\eta\rangle = \langle \xi, B(\delta_{x^{-1}} \star f)\eta\rangle, \qquad \xi, \eta \in H.$$

Nietrudno sprawdzi, e

$$B(f)\pi_x = B(f \star \delta_x), \qquad \pi_x \pi_y = \pi_{xy},$$

dla $x, y \in G$, a take

$$\langle (\pi_x)^\star \xi, \eta\rangle = \langle \pi_{x^{-1}}\xi, \eta\rangle$$

dla $\xi \in H_0$, $\eta \in H$, czyli

$$(\pi_x)^\star = \pi_{x^{-1}} = (\pi_x)^{-1}.$$

Wreszcie

$$\pi_x B(f) = B(\delta_x \star f).$$

To wszystko pokazuje, e operatory π_x s unitarne oraz, e $x_n \to e$ pociga $\pi_{x_n}\xi \to \xi$.

Pozostaje sprawdzi, e B jest cakow form π. Niech $f, g \in L^1(G)$ i niech $\xi, \eta \in H$. Wtedy

$$\langle B(f)B(g)\xi, \eta\rangle = \langle B(f \star g)\xi, \eta\rangle,$$

a skoro

$$f \star g = \int f(y)\delta_y \star g\, dy,$$

mamy

$$\langle B(f \star g)\xi, \eta\rangle = \int_G \langle f(y) B(\delta_y \star g)\xi, \eta\rangle\, dy = \int_G f(y)\langle B(g)\xi, \pi_{y^{-1}}\eta\rangle\, dy.$$

Ostatecznie,

$$\langle B(f)\xi, \eta\rangle = \int_G f(y)\langle \pi_y \xi, \eta\rangle\, dy, \qquad \xi \in H_0, \eta \in H.$$

2.14. Uwaga. Mona udowodni, e kady *-homomorfizm $B : L^1(G) \to \mathcal{B}(H)$ jest cigy.

3. Reprezentacja Schrödingera

3.1. *Reprezentacja Schrödingera* grupy Heisenberga **H** dziaa na przestrzeni Hilberta $H = L^2(\boldsymbol{R}^n)$. Definiujemy operatory reprezentacji we wsplrzdnych kanonicznych drugiego rodzaju wzorem

$$\begin{aligned}
\pi_{(x,0,0)} f(s) &= \pi_{\exp\sum_k x_k X_k} f(s) = f(s + x),\\
\pi_{(0,y,z)} f(s) &= \pi_{\exp\sum_k y_k Y_k} f(s) = e^{2\pi i y s} f(s),\\
\pi_{(0,0,z)} f(s) &= \pi_{\exp zZ} f(s) = e^{2\pi i z} f(s),
\end{aligned}$$

czyli

$$\pi_{(x,y,z)} f(s) = e^{2\pi i z} e^{2\pi i x y} e^{2\pi i y s} f(s + x).$$

Pamitamy, e

$$(x, y, z) = (x, 0, 0) \circ (0, y, 0) \circ (0, 0, z - \frac{1}{2}xy),$$

wic we wsprzdnych kanonicznych pierwszego rodzaju:

$$\pi_{(x,y,z)} f(s) = e^{2\pi i z} e^{\pi i x y} e^{2\pi i y s} f(x + s).$$

Bezporednim rachunkiem sprawdzamy, e

$$\pi_{(x,y,z)\circ(x',y',z')} + \pi_{(x,yz)}\pi_{(x',y',z')}.$$

Jest take jasne, e zdefiniowane operatory s unitarne. Mocna cigo reprezentacji wynika z twierdzenia Lebesgue'a o zbieznoci zmajoryzowanej.

3.2. Twierdzenie. Reprezentacja Schrödingera π jest nieprzywiedlna.

3.3. Dowd: Pokaemy, e dla dowolnego $0 \neq f \in L^2(\boldsymbol{R}^n)$ orbita

$$\mathcal{O}(f) = \{\pi_a f : a \in \mathbf{H}\}$$

jest gsta w $L^2(\boldsymbol{R}^n)$. To oczywicie pocignie, e rodzina $\{\pi_a\}_{a\in\mathbf{H}}$ nie ma wsplnej domknitej nietrywialnej podprzestrzeni niezmienniczej.

Niech wic $\overline{g} \perp \mathcal{O}(f)$ bdzie elementem $L^2(\boldsymbol{R}^n)$. Trzeba pokaza, e $g = 0$. Mamy

$$0 = \langle \pi_{(x,y,0)} f, g\rangle = e^{\pi i x y} \int_{\boldsymbol{R}^n} e^{2\pi i y s} f(x+s) g(s)\, ds, \qquad x, y \in \boldsymbol{R}^n,$$

wic

$$f(t)g(t+x) = 0$$

dla p. w. $x \in \boldsymbol{R}^n$ i p.w. $t \in \boldsymbol{R}^n$. Niech E bdzie zbiorem skoczonej miary dodatniej, takim e $|f(t)| > 0$ dla p. w. $t \in E$. Wtedy

$$g(t+x) = 0$$

dla p. w. $t \in E$ i p. w. $x \in \boldsymbol{R}^n$, co pociga

$$\int |g(x)|^2\, dx = \frac{1}{|E|} \int_E \int |g(x+t)|^2\, dx\, dt = 0.$$

3.4. Nietrudno sprawdzi, e dla kadego $h > 0$

$$\delta_h(x,y,z) = (hx, hy, h^2 z)$$

jest automorfizmem grupy $\mathbf{H}$. Podobnie

$$(x,y,z) \mapsto (y, x, -z)$$

jest automorfizmem. Zatem

$$\beta_h(x,y,z) = \begin{cases} (\sqrt{|h|}x, \sqrt{|h|}y, hz), & h > 0, \\ (\sqrt{|h|}y, \sqrt{|h|}x, hz), & h < 0, \end{cases}$$

jest automorfizmem $\mathbf{H}$ dla kadego $h \neq 0$.

3.5. *Reprezentacj Schrödingera π^h ze sta Plancka $h \neq 0$* nazywamy reprezentacj

$$\pi^h_{(x,y,z)} = \pi_{\beta_h(x,y,z)}.$$

Jak wida, wszystkie reprezentacje π^h dziaaj na tej samej przestrzeni Hilberta $H = L^2(\boldsymbol{R}^n)$.

3.6. Twierdzenie. Niech $F \in L^1(\mathbf{H})$. Wtedy

$$\pi_F f(s) = \int K_F(s,x) f(x)\, dx,$$

gdzie

$$K_F(s,x) = F\,(x-s,\ \cdot\ ,\ \cdot\ )^{\vee}\left(\frac{s+x}{2}, 1\right)$$

3.7. Dowd: Rzeczywicie,

$$\begin{aligned}\langle \pi_F f, g\rangle &= \int_{\mathbf{H}} F(a)\langle \pi_a f, g\rangle \, da \\ &= \int_{\mathbf{H}} \int_{\boldsymbol{R}^n} F(x,y,z) e^{2\pi i z} e^{\pi i x y} e^{2\pi i y s} f(s+x)\overline{g(s)}\, ds\, dx\, dy\, dz \\ &= \int_{\boldsymbol{R}^n} \int_{W} F(x-s, y, \cdot)^{\vee}(1) e^{\pi i y \frac{x+s}{2}} f(x)\overline{g(s)}\, ds\, dx\, dy \\ &= \int_{\boldsymbol{R}^n} \int_{\boldsymbol{R}^n} F(x-s, \cdot, \cdot)^{\vee}\left(\frac{x+s}{2}, 1\right) f(x)\overline{g(s)}\, ds\, dx\end{aligned}$$

skd ju wynika posta jdra cakowego.

3.8. Wniosek. Niech $F \in \mathcal{S}(\mathbf{H})$. Wtedy

$$\pi_F^h u(x) = \iint e^{2\pi i (x-y)\xi} a_h\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) u(y)\, d\xi\, dy, \qquad u \in \mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n),$$

gdzie

$$a_h(z,\xi) = F^{\vee}\left(\sqrt{h}\xi, \sqrt{h}z, h\right), \qquad h > 0,$$

oraz

$$a_h(z,\xi) = F^{\vee}\left(\sqrt{|h|}z, \sqrt{|h|}\xi, h\right), \qquad h < 0.$$

Innymi sowy, π_F^h jest operatorem pseudorniczkowym z symbolem Weyla a_h, co si krtko zapisuje jako $\pi_F^h = a_h^w(x, D)$.

4. Splot skrcony w algebrze $L^1(W)$

4.1. Zainspirowani ostatnim twierdzeniem rozwamy odwzorowanie

(0) $$L^1(\mathbf{H}) \ni F \mapsto F_0 \in L^1(\boldsymbol{R}^{2n})$$

zdefiniowane wzorem

$$F_0(x,y) = F(x,y,\cdot)^{\vee}(1) = \int_{\boldsymbol{R}} F(x,y,z) e^{2\pi i z}\, dz.$$

Oznaczmy zmienn w $\boldsymbol{R}^{2n}$ przez $w = (x,y)$. Wtedy

$$F_0(w) = \int_{\boldsymbol{R}} F(w,z) e^{2\pi i z}\, dz.$$

Oczywicie

$$\|F_0\|_1 \leq \|F\|_1.$$

4.2. Reprezentacja Schrödingera algebry $(L^1(W), \#)$**.** Mamy

$$(F \star G)_0 = F_0 \# G_0 = \int_{\boldsymbol{R}^{2n}} F_0(w-v) G_0(v) e^{\pi i < w, v >}\, dv,$$

gdzie

$$< w, v > = < (x,y), (x'y') > = xy' - yx'$$

jest niezdegenerowan form symplektyczn na $W = \boldsymbol{R}^{2n}$.

$L^1(W)$ ze *splotem skrconym* $\#$ jest algebr Banacha i obrazem $\star$-homomorficznym $L^1(\mathbf{H})$ przerz odwzorowanie (0). Co wicej,

$$\pi_{F_0}^0 f(s) = \int K_{F_0}(s,x) f(x)\, dx,$$

gdzie

$$K_{F_0}(s,x) = F_0(x-s,\ \cdot\ )^{\vee}(\frac{s+x}{2})$$

jest $\star$-reprezentacj $L^1(W)$ na $H = L^2(\boldsymbol{R}^n)$. Reprezentacja ta jest *wierna*, tzn.

$$\pi_{F_0}^0 = 0 \implies F_0 = 0,$$

bo

$$\int_W |K_{F_0}(w)|^2 \, dw = \int_W |F_0(w)|^2 \, dw.$$

Z definicji

$$\pi_F = \pi^0_{F_0},$$

tak e nastpujcy diagram jest przemienny:

$$\begin{tikzcd}
L^1(\mathbf{H}) \arrow[r, "0"] \arrow[dr, "\pi"] & L^1(W) \arrow[d, "\pi^0"] \\
& \mathcal{B}(L^2(H))
\end{tikzcd}$$

4.3. Uwaga. Jeli dodatkowo zdefiniujemy

$$\pi^0_w = \pi_{(w,0)},$$

to wtedy

$$\pi^0_{F_0} f = \int_W F_0(w) \pi^0_w f \, dw,$$

ale π^0 nie jest reprezentacj grupy abelowej W, bo

$$\pi_{w+v} = e^{\pi i <w,v>} \pi_w \pi_v.$$

Tym niemniej, operatory π^0 s unitarne i dlatego nieco niecile bdziemy mwili o "reprezentacji" $w \mapsto \pi^0_w$.

4.4. Wniosek. Jeli $F_0 \in \mathcal{S}(W)$, to $\pi^0_{F_0}$ jest operatorem Hilberta-Schmidta oraz

$$\|\pi^0_{F_0}\|_{HS} = \|F_0\|_2,$$

a wic π^0 rozszerza si jednoznacznie do izometrii:

$$L^2(W) \ni F_0 \mapsto \pi^0_{F_0} \in HS(L^2(\boldsymbol{R}^n)).$$

4.5. Wniosek. Dla kadego $F \in L^1(\mathbf{H})$ operator π_F jest zwarty.

4.6. Uwaga. Mona pokaza, e jeli $F \in \mathcal{S}(\mathbf{H})$, to π_F rozszerza si do cigego operatora liniowego z $\mathcal{S}'(\boldsymbol{R}^n)$ w $\mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n)$. Wynika to po prostu std, e jego jdro K_F naley do $\mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^n)$.

4.7. Jeli $f, g \in L^2(\boldsymbol{R}^n)$, to funkcj na W zadan wzorem

$$F_{f,g}(w) = \langle \pi^0_w f, g \rangle$$

bdziemy nazywa *wspczynnikiem* lub *elementem macierzowym* reprezentacji π^0. Mamy

$$F_{f,g}(w) = V(f \otimes \overline{g})(w),$$

gdzie

$$V(F)(x,y) = \int_{\boldsymbol{R}^n} e^{2\pi i y s} F(s + \frac{x}{2}, s - \frac{x}{2}) \, ds,$$

co przelicza si wprost z definicji reprezentacji.

4.8. Twierdzenie. Dla kadych $f_1, g_1, f_2, g_2 \in L^2(\boldsymbol{R}^n)$

$$\langle F_{f_1,g_1}, F_{f_2,g_2} \rangle = \langle f_1, f_2 \rangle \overline{\langle g_1, g_2 \rangle}.$$

4.9. Dowd: Wynika to z faktu, e V jest izometri $L^2(W)$.

4.10. Wniosek. Jeli $f, g \in L^2(\boldsymbol{R}^n)$, to

$$\pi^0_{F_{f,g}} h = \langle h, f\rangle g, \qquad h \in L^2(\boldsymbol{R}^n).$$

4.11. Wniosek. Elementy macierzowe reprezentacji π^0 zbudowne na elementach klasy Schwartza, tj. funkcje

$$w \mapsto \langle \pi^0_w f, g\rangle, \qquad f, g \in \mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n),$$

tworz gsty podzbir w $\mathcal{S}(W)$, a wic i w $L^1(W)$.

4.12. Dowd: Wystarczy zauway, e odwzorowanie V jest izomorfizmem $\mathcal{S}(W)$, a funkcje postaci $(x, y) \mapsto f(x)g(y)$ le gsto w $\mathcal{S}(W)$.

4.13. Lemat o gaussianach. Niech

$$\varphi(x) = 2^{-n/4} e^{-\pi|x|^2}.$$

Wtedy

(a) $$\langle \pi^0_w \varphi, \varphi\rangle = \Phi(w) = 2^{-n/2} e^{-\frac{1}{2}\pi|w|^2}, \qquad w \in W$$

oraz

(b) $$\pi^0_\Phi f = \langle f, \varphi\rangle \varphi, \qquad f \in L^2(\boldsymbol{R}^n).$$

Ponadto

(c) $$\Phi \# \delta_w \# \Phi = \Phi(w)\Phi, \qquad \Phi\#\Phi = \Phi, \qquad w \in W,$$

Wasno (a) przelicza si bezporednim rachunkiem. Wasno (b) wynika z Wniosku 4.10. Wasno (c) najlepiej sprawdzi, przechodzc przez wiern reprezentacj π^0 do rachunku na operatorach i korzystajc z (a), (b).

4.14. Niech ρ^0 bdzie cig $\star$-reprezentacj algebry $L^1(W)$ na pewnej przestrzeni Hilberta K. Skadajc t reprezentacj z odwzorowaniem $F \to F_0$, otrzymujemy cig inwolutywn reprezentacj algebry $L^1(\mathbf{H})$, a wic take unitarn reprezentacj ρ grupy $\mathbf{H}$. Moemy wic mwi o unitarnych operatorach

$$\rho^0_w = \rho_{(w,0)}$$

oraz o elementach macierzowych reprezentacji ρ^0:

$$w \mapsto \langle \rho^0_w \xi, \eta\rangle, \qquad \xi, \eta \in K.$$

Jest jasne, e s to funkcje ograniczone i cige.

4.15. Wniosek. Kada $*$-reprezentacja algebry $L^1(W)$ jest wierna.

4.16. Dowd: Przypumy bowiem, e $\rho^0_F = 0$ dla pewnej funkcji $F \in L^1(W)$. Niech $G(v) = e^{\pi i\langle v,w\rangle} F(v)$. Jak wiemy, $G = \delta_{-w} \# F \# \delta_w$, wic

$$\rho^0_G = \rho^0_{-w} \rho^0_F \rho^0_w = 0,$$

czyli

$$\int_W e^{\pi i \langle w,v\rangle} F(v) \rho^0_v \xi \, dv = 0, \qquad w \in W, \xi \in H.$$

Otrzymane wyraenie jest transformat Fouriera, wic w konsekwencji

$$F(v)\rho^0_v \xi = 0, \qquad w \in W, \xi \in H,$$

a to pociga $F = 0$.

4.17. Twierdzenie. Reprezentacja π^0 jest jedyn niezerow nieprzywiedln $\star$-reprezentacj algebry $L^1(W)$ ze splotem skrconym.

4.18. Dowd. Niech ρ^0 bdzie nieprzywiedln $\star$-reprezentacj $L^1(W)$ na przestrzeni Hilberta H. Z wiernoci ρ^0 wynika, e ρ^0_Φ jest niezerowym rzutem ortogonalnym. Niech $\xi = \rho_\Phi \eta$ bdzie ustalonym wektorem dugoci 1. W przypadku π^0 kadziemy $\xi = \varphi$. Skoczone kombinacje liniowe

$$\zeta = \sum_k \alpha_k \rho^0_{w_k} \xi$$

lea gsto w H, bo jak kady niezerowy wektor reprezentacji nieprzywiedlnej ξ jest cykliczny. Obliczmy dugo takiej kombinacji. Jest

$$\begin{aligned}\|\zeta\|^2 &= \sum_{j,k} \alpha_j \bar{\alpha}_k \langle \rho^0_{w_j}\xi, \rho^0_{w_k}\xi\rangle = \sum_{j,k} \alpha_j \bar{\alpha}_k e^{i\pi\langle w_k, w_j\rangle} \langle \rho^0_\Phi \rho^0_{w_j - w_k} \rho^0_\Phi \eta, \eta\rangle \\ &= \sum_{j,k} \alpha_j \bar{\alpha}_k e^{i\pi\langle w_j, w_k\rangle} \Phi(w_j - w_k) \langle \rho^0_\Phi \eta, \eta\rangle = \sum_{j,k} \alpha_j \bar{\alpha}_k e^{i\pi\langle w_j, w_k\rangle} \Phi(w_j - w_k).\end{aligned}$$

Wynik nie zaley od wyboru reprezentacji ani wektora cyklicznego w obrazie ρ^0_Φ. Wida wic, e odwzorowanie

$$L^2(\boldsymbol{R}^n) \ni \sum_k \alpha_k \pi^0_{w_k}\varphi \mapsto \sum_k \alpha_k \rho^0_{w_k}\xi \in H$$

jest izometri liniow o gstej dziedzinie i gstym obrazie, a wic przedua si do odwzorowania unitarnego U, ktre w oczywisty sposb jest te splatajce.

5. Nieprzywiedlne reprezentacje unitarne grupy $\mathbf{H}$

5.1. Twierdzenie Stone'a-von Neumanna. Niech ρ bdzie nieprzywiedln unitarn reprezentacj grupy $\mathbf{H}$, tak e

$$\rho_{(0,0,z)} = e^{2\pi i z} I$$

dla elementw centralnych $(0, 0, z) \in \mathbf{H}$. Wtedy reprezentacja ρ jest rwnowana reprezentacji Schrödingera π.

5.2. Dowd: Reprezentacja ρ^0 algebry $L^1(W)$ jest niezerowa i nieprzywiedlna, wic rwnowana π^0. W takim razie reprezentacje ρ i π s take rwnowane.

5.3. Twierdzenie. Kada nieprzywiedlna reprezentacja unitarna grupy $\mathbf{H}$ naley z dokadnoci do unitarnej rwnowanoci eo jednej z dwch nastpujcych serii:

(I) Pierwsza seria skada si z reprezentacji jednowymiarowych, a wic homomorfizw $\mathbf{H}$ w grup koa $\mathbf{T}$ o postaci

$$\chi(w, z) = e^{\pi<w,v>}, \qquad v \in W.$$

(II) Druga seria to opisane wczeniej reprezentacje Schrödingera π^h, $h \in \boldsymbol{R} \setminus \{0\}$, dziaajce na $H = L^2(\boldsymbol{R}^n)$.

Wszystkie wymienione wyej reprezentacje s parami nierwnowane.

5.4. Dowd: Niech ρ bdzie unitarn reprezentacj nieprzywiedln grupy $\mathbf{H}$. Z Kryterium 2.2 wynika, e operatory $\rho(w, 0)$ s postaci $e^{2\pi i h z} I_H$ dla pewnego $h \in \boldsymbol{R}$. Rnym h odpowiadaj reprezentacje nierwnowane.

(I) Jeli $h = 0$, to

$$\rho_{(w,0)}\rho_{(v,0)} = \rho_{(w+v,0)},$$

wic $w \mapsto \rho_{(w,0)}$ jest nieprzywiedln reprezentacj unitasrn grupy abelowej W. Istnieje wic $v \in W$, takie e

$$\rho_{(w,z)} = e^{2\pi<w,v>}, \qquad (w, z) \in \mathbf{H}.$$

(II) Niech teraz $h \neq 0$. Wtedy

$$a \mapsto \rho_{\beta_h^{-1}(a)}$$

jest nieprzywiedln reprezentacj unitarn, ktra elementom postaci $(0, 0, z)$ przyporzdkowuje operatory $e^{2\pi i z} I_H$. Na mocy twierdzenia Stone'a-von Neumanna reprezentacja ta jest rwnowana π, a zatem ρ jest rwnowana π^h.

5.5. Wzr Plancherela. Niech $F \in \mathcal{S}(\mathbf{H})$. Wtedy

$$\|F\|_2^2 = \int_{\boldsymbol{R}\setminus\{0\}} \|\pi^h_F\|^2_{HS}\, |h|^n dh.$$

5.6. Dowd: Niech K_1 oznacza jdro operatora π^1_F. Wiemy, e

$$\|\pi^1_F\|^2_{HS} = \int_W |F(w,\cdot)^\vee(1)|^2\, dw.$$

Z definicji reprezentacji π^h wynika przez prost zamian zmiennej, e

$$\pi^h_F = |h|^{-n-1}\pi^1_{f\circ\beta_h^{-1}}.$$

Przypomnijmy, e

$$\beta_h(w,z) = (|h|^{1/2}\tilde{w}, hz),$$

gdzie

$$\tilde{w} = \begin{cases} (x,y), & h>0,\\ (y,x), & h<0. \end{cases}, \qquad w=(x,y)\in W.$$

Zatem

$$\|\pi^h_F\|^2_{HS} = |h|^{-2n-2}|h|^2 \int_W |F(|h|^{-1/2}\tilde{w},\cdot)^\vee(h)|^2\, dw = |h|^{-n}\int_W |F(\tilde{w},\cdot)^\vee(h)|^2\, dw,$$

skd za pomoc zamiany zmiennej $\tilde{w}\mapsto w$ i wzoru Plancherela dla $L^2(\boldsymbol{R})$, otrzymujemy

$$\int_{\boldsymbol{R}\setminus\{0\}} \|\pi^h_F\|^2_{HS}\, |h|^n dh = \int_{W\times\boldsymbol{R}} |F(w,h)|^2\, dwdh = \|F\|^2_2.$$

5.7. ZADANIE DOMOWE. Niech

$$\Gamma = \{(0,0,k)\in\mathbf{H} : k\in\boldsymbol{Z}\}$$

bdzie dyskretn podgrup grupy Heisenberga. Wyka, e grupa $\mathbf{H}/\Gamma$ jest grup Liego. Znajd jej algebr Liego, opisz nieprzywiedlne reprezentacje unitarne i udowodnij twierdzenie Plancherela.