# Cz IV: Caki osobliwe na grupach jednorodnych

**Polecana literatura:**


**1.** G.B. Folland, Harmonic analysis in phase space,
**2.** G.B. Folland and E.M Stein, Hardy spaces on homogeneous groups, rozdziay 1,3,6,
**3.** P. Głowacki, The Melin calculus for general homogeneous groups, *Arkiv för matematik*, 45 (2007), 31-48,
**4.** P. Głowacki, Composition and $L^2$-boundedness of flag kernels, *Colloq. Math.*, 118 (2010), 581-585. Correction, *Colloq. Math.*, 120 (2010), 331,
**5.** P. Gowacki, $L^p$-boundedness of flag kernels on homogeneous groups (dostpna na mojej stronie www.),
**6.** R. Howe, A symbolic calculus for nilpotent groups, *Operator Algebras and Group Representations* I, Neptun 1980, 254-277, Monographs Stud. math. 17,1984;
**7.** D. Manchon, Formule de Weyl pour les groupes de Lie nilpotents, J. Reine Angew. Math. 418 (1991), 77-129;
**8.** A. Melin, Parametrix constructions for right-invariant differential operators on nilpotent Lie groups, Ann. Glob. Anal. Geom. 1 (1983), 79-130;
**9.** A. Nagel, F. Ricci, and E.M. Stein, Singular integrals with flag kernels and analysis on quadratic CR manifolds, *J. Func. Analysis* 181, 29-118 (2001).
**10.** A. Nagel, F. Ricci, E.M. Stein, S. Wainger, Singular integrals with flag kernels on homogeneous groups I, *arXiv: 1108.0177v1*,
**11.** E.M. Stein, Harmonic analysis, rozdziay 1 i 2,


## 1. Grupy jednorodne

**1.1.** Niech $\mathfrak{g}$ bdzie algebr Liego, na ktrej dziaa grupa automorfizmw $\{\delta_t\}_{t>0}$ zwanych *dylatacjiami*, w taki sposb e

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{j=1}^{d} \mathfrak{g}_j, \qquad \mathfrak{g}_j = \{x \in \mathfrak{g} : tx = t^{p_j} \cdot x\}, \tag{@}$$

gdzie

$$1 = p_1 < p_2 < \cdots < p_d$$

s *wykadnikami jednorodnoci* algebry $\mathfrak{g}$. Oznacza to m. in., e $[\mathfrak{g}_j, \mathfrak{g}_k] \subset \mathfrak{g}_l$, jeli $p_j + p_k = p_l$ i $[\mathfrak{g}_j, \mathfrak{g}_k] = \{0\}$, jeli $p_j + p_k$ nie jest wykadnikiem jednorodnoci.

Tak algebr bdziemy nazywa *jednorodn algebr Liego*. Zauwamy, e jednorodna algebra Liego jest nilpotentna. Przestrze $\mathfrak{g}$ bdziemy te rozwaa jako nilpotentn grup Liego z mnoeniem Campbella-Hausdorffa i nazywa *jednorodn grup Liego*. Pamitamy, e w tej sytuacji odwzorowanie wykadnicze jest identycznoci, a automorfizmy algebry s jednoczenie automorfizmami grupy.

**1.2.** Niech $\mathfrak{g}$ bdzie grup jednorodn. Istnieje funkcja $|\cdot| : \mathfrak{g} \to (0, \infty)$, ktra jest gadka poza jednoci (zerem), jednorodna stopnia 1, poddatytywna i dodatnia na $\mathfrak{g} \setminus \{0\}$. Jeli $\|\cdot\|$ jest norm euklidesow na $\mathfrak{g}$ wzgldem ktrej rozkad (@) jest ortogonalny, to

$$|x| \approx \sum_{j=1}^{d} \|x_j\|^{1/p_j}.$$

**1.3. Przykad.** Niech $\mathbf{H}$ oznacza grup Heisenberga $\mathbf{H} = W \times \boldsymbol{R}$ z mnoeniem

$$(w_1, z_1) \circ (w_2, z_2) = (w_1 + w_2, z_1 + z_2 + \frac{1}{2} < w_1, w_2 >),$$

gdzie

$$< w_1, w_2 >=< (x_1, y_1), (x_2, y_2) >= x_1 y_2 - x_2 y_1,$$

jest niezdegenerowan form symplektyczn na $W = \boldsymbol{R}^{2n}$. Wtedy rodzina automorfizmw

$$\delta_t(w, z) = (tw, t^2 z), \qquad t > 0.$$

stanowi dylatacje, a funkcja

$$|(x, y, z)| = \sqrt[4]{\|x\|^4 + \|y\|^4 + \|z\|^2}$$

jest norm jednorodn, chocia sprawdzenie tego ostatniego nie jest bynajmniej banalne.

**1.4.** Niech $\mathfrak{g}$ bdzie grup jednorodn. Nietrudno zauway, e metryka

$$d(x,y) = |x^{-1}y|$$

jest niezmiennicza wzgldem dziaania grupy i rwnowana z metryk euklidesow. Niech

$$B(a,r) = \{x \in H : d(x,a) < r\}$$

oznacza odpowiedni kul wzgldem tej metryki.

**1.5.** Niech $\{X_j\}$ bedzie baz algebry Liego grupy $\mathfrak{g}$, tak e dla kadego $j$ istnieje $k = k(j)$, takie e $X_j \in \mathfrak{g}_k$. Niech $f \in C^1(\mathfrak{g})$. Wtedy dla dowolnych $x, y \in \mathfrak{g}$

$$|f(xy) - f(x)| \le \max_{1\le j\le N} \sup_{|z|\le|y|} |X_j f(xz)||y|^{p_{k(j)}}.$$

W szczeglnoci, jeli $k \in C^1(\mathfrak{g} \setminus \{0\})$ jest jednorodna stopnia $-Q$ i $|x| \ge 2|y|$, to

$$|k(yx) - k(x)| + |k(xy) - k(x)| \le \frac{C|y|}{|x|^{Q+1}}$$

**1.6.** Istnieje miara borelowska $d\bar{x}$ na $S = \{x \in \mathfrak{g} : |x| = 1\}$, taka e dla kadej funkcji $f \in C_c(\mathfrak{g} \setminus \{0\})$

(*)
$$\int_{\mathfrak{g}} f(x)\,dx = \int_0^\infty r^{Q-1} \int_S f(r\bar{x})\,d\bar{x}dr,$$

gdzie $Q = 2n + 2$.

**1.7. Dowd:** Zacznijmy od definicji miary na sferze $S$. Dla ustalonej funkcji $\varphi \in C(S)$ niech i $r > 0$

$$L(r) = \int_1^r |x|^{-Q}\varphi(\bar{x})\,dx = \begin{cases} \int_{1\le|x|\le r} |x|^{-Q}\varphi(\bar{x})\,dx, & r \ge 1, \\ -\int_{r\le|x|\le 1} |x|^{-Q}\varphi(\bar{x})\,dx, & 0 < r < 1. \end{cases}$$

Nietrudno sprawdzi, e $L(r^{-1}) = -L(r)$ i $L(rs) = L(r) + L(s)$, skd wynika, e

$$L(r) = \mu(\varphi)\log r, \qquad \mu(\varphi) = \int_{1\le|x|\le e} |x|^{-Q}\varphi(\bar{x})\,dx.$$

Widzimy, e $\mu$ jest dodatnim funkcjonaem na $C(S)$, a wic miar borelowsk na $S$. Co wicej,

$$\int_{\mathfrak{g}} g(|x|)|x|^{-Q}\varphi(\bar{x})\,dx = \mu(\varphi)\int_0^\infty \frac{g(r)}{r}\,dr$$

dla $g \in C_c(0,\infty)$, co atwo si sprawdza dla funkcji charakterystycznych, ktre le liniowo gsto w $L^1((0,\infty), \frac{dr}{r})$.

Jako e

$$\mathfrak{g} \setminus \{0\} \ni x \mapsto (|x|, \bar{x}) \in (0,\infty) \times S$$

jest homeomorfizmem, funkcje postaci $x \mapsto f(x) = g(|x|)\varphi(\bar{x})$, gdzie $g \in C_c(0,\infty)$, $\varphi \in C(S)$, le liniowo gsto w $C_c(\mathfrak{g} \setminus \{0\})$ i dla nich wystarczy sprawdzi wzr (*). Mamy

$$\begin{aligned}\int_{\mathfrak{g}} f(x)\,dx &= \int_{\mathfrak{g}} g_1(|x|)|x|^{-Q}\varphi(\bar{x})\,dx = \mu(\varphi)\int_0^\infty r^{Q-1}g(r)\,dr \\ &= \int_0^\infty r^{Q-1}\int_S g(r)\varphi(\bar{x})\,d\mu(x)dr = \int_0^\infty r^{Q-1}\int_S f(r\bar{x})\,d\mu(x)dr,\end{aligned}$$

gdzie $g_1(|x|) = g(|x|)|x|^Q$.

**1.8. Lemat Wienera-Vitali'ego.** Niech $\mathcal{B}$ bdzie skoczon rodzin kul w $\mathfrak{g}$. Z rodziny $\mathcal{B}$ mona wybra podrodzin $\{B_k\}_{k=1}^N$, w taki sposb aby kule $B_k$ byy parami rozczne oraz

$$\bigcup \mathcal{B} \subset \bigcup_{k=1}^N B_k^\star,$$

gdzie $B(a,r)^\star = B(a,4r)$.

**1.9. Dowd:** Niech $B_1$ bdzie kul o maksymalnym promieniu. Kula $B_2$ to kula o maksymalnym promieniu spord kul z $\mathcal{B}$ rozcznych z $B_1$. Nastpnie jako kul $B_3$ bierzemy kul o maksymalnym promieniu wrd kul rozcznych zarwno z $B_1$, jak i z $B_2$. Postpujemy w ten sposb, tak dugo, jak dugo istniej jeszcze kule rozczne z wszystkimi dotd wybranymi.

Pozostaje pokaza, e kada z niewybranych kul zawiera si w sumie $\bigcup_k B_k^\star$. Niech $B$ bdzie tak kul i niech $B_k$ bdzie kul o najniszym numerze rozczn z $B$. Wtedy promie $B_k$ jest co najmniej taki, jak promie $B$, wic $B \subset B_k^\star$.

**1.10.** Podobnie jak w $\boldsymbol{R}^n$ definiujemy funkcj maksymaln Hardy'ego-Littlewooda:

$$Mf(x) = \sup_{x \in B} \frac{1}{|B|} \int_B |f(y)|\, dy.$$

**1.11.** Dla $\alpha > 0$ i $f \in L^1(\mathfrak{g})$ niech

$$\Omega_\alpha(f) = \{x \in \mathfrak{g} : Mf(x) > \alpha\}.$$

Wtedy

$$|\Omega_\alpha(f)| \le \frac{C\|f\|_1}{\alpha}, \qquad f \in L^1(\mathfrak{g}),\ \alpha > 0.$$

**1.12. Dowd:** Niech $x \in \Omega_\alpha(f)$. Istnieje wtedy kula $B(x) \subset \Omega_\alpha$, taka e

(*)
$$\frac{1}{|B(x)|} \int_{B(x)} |f(y)|\, dy > \alpha.$$

Otrzymujemy w ten sposb pokrycie zbioru $\Omega_\alpha(f)$ kulami $B(x)$, z ktrego to pokrycia mona wybra podpokrycie przeliczalne $\Omega_\alpha(f) = \bigcup_j B(x_j)$. Ustalmy $N \in \boldsymbol{N}$ i zastosujmy lemat Wienera do kul $B(x_j)$, $1 \le j \le N$. Otrzymujemy nowe kule $B_k$, $1 \le k \le K$, speniajce warunek (*), ktre s parami rozczne, a ponadto

$$\bigcup_{j=1}^N B(x_j) \subset \bigcup_{k=1}^K B_k^\star.$$

Wobec tego

$$|\bigcup_{j=1}^N B(x_j)| \le 3^{2n+1} \sum_{k=1}^K |B_k| \le \frac{C}{\alpha} \int_{B_k} |f(y)|\, dy \le \frac{C}{\alpha} \int_{Mf > \alpha} |f(y)|\, dy,$$

gdzie prawa strona nierwnoci nie zaley ju od $N$. Pozostaje zauway, e

$$|\Omega_\alpha(f)| = \lim_{N| \to \infty} |\bigcup_{j=1}^N B(x_j)|.$$

**1.13. Wniosek.** Jeli $f \in L^1(\mathfrak{g})$, to

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{1}{|B(x,\delta)|} \int_{B(x,\delta)} f(y)\, dy = f(x)$$

dla prawie wszystkich $x \in \mathfrak{g}$.

## 2. Lemat Calderóna-Zygmunda

**2.1. Uwaga.** W dowodzie lematu Calderóna-Zygminda w $\boldsymbol{R}^n$ wan rol peni rozkad Whitneya zbioru otwartego na diadyczne kostki domknite o rozcznych wntrzach, ktrych rednice s proporcjonalne do odlegoci od brzegu. Rozkad ten nie zosta *explicite* nazwany, ale jest widoczny w dowodzie I.5.2 lematu C-Z.

**2.2. Lemat Whitneya.** Niech $\Omega \subset \mathfrak{g}$ bdzie niepustym zbiorem otwartym. Istnieje wtedy cig kul $B_k$, taki e

a) $B_k$ s parami rozczne,

b) $\bigcup_k B_k^\star = \Omega$,

c) $B_k^{\star\star} \cap \bar{\Omega}^c \neq \emptyset$ dla kadego $k$,

gdzie tym razem $B(a,\delta)^\star = B(a,3\delta)$.

**2.3. Dowd:** Dla danego $x \in \Omega$ niech $\delta(x)$ oznacza jego odlego od $\partial\Omega$. Niech $1/9 < \varepsilon < 1/3$. Z pokrycia zbioru $\Omega$ kulami $B(x, \varepsilon\delta(x))$, $x \in \Omega$, wybieramy maksymalne pokrycie kulami parami rozcznymi. Skada si ono z cigu kul $B_k = B(x_k, \varepsilon\delta(x_k))$, $1 \leq k < \infty$.

Jest jasne, e kule $B_k$ speniaj warunki a) i c), a ponadto $B_k^\star \subset \Omega$. Pozostaje udowodni, e

$$\Omega \subset \bigcup_k B_k^\star.$$

Niech $x \in \Omega$. Istnieje $k$, takie e

$$B(x, \varepsilon\delta(x)) \cap B(x_k, \varepsilon\delta(x_k)) \neq \emptyset,$$

wic

$$\delta(x) < \varepsilon\delta(x) + \varepsilon\delta(x_k) + \delta(x_k),$$

skd

$$\delta(x) < 2\delta(x_k).$$

Wobec tego $|x - x_k| < 3\varepsilon\delta(x_k)$, a wic $x \in B_k^\star$.

**2.4. Lemat Calderóna-Zygmunda.** Niec $0 \leq f \in L^1(\mathfrak{g})$. Istnieje cig parami rozcznych zbiorw mierzalnych $Q_k$ i cig kul $B_k$, taki e

a) $B_k \subset Q_k \subset B_k^\star$,

b) $|Q_k|^{-1} \int_{Q_k} f(x)\, dx \approx \alpha$,

c) $f(x) \leq \alpha$ dla $x \notin \bigcup_k B_k^\star$.

**2.5. Dowd:** Niech

$$\Omega = \{x \in \mathfrak{g} : Mf(x) > \alpha\}$$

i niech $B_k$ bdzie cigiem kul z lematu Whitneya. Wtedy

$$f(x) \leq \alpha, \qquad x \notin \Omega \subset \bigcup_k B_k^\star,$$

oraz

$$|B_k^\star|^{-1} \int_{B_k^\star} f(x)\, dx \approx \alpha.$$

Zbiory $B_k$ nie s jednak parami rozczne. Dlatego definiujemy

$$Q_1 = B_1^\star \setminus \bigcup_{k>1} B_k$$

i dalej rekurencyjnie

$$Q_k = B_k^\star \setminus \bigcup_{j<k} Q_j \setminus \bigcup_{j>k} B_j.$$

Zbiory $Q_k$ s parami rozczne, $\bigcup_k Q_k = \Omega$ oraz $B_k \subset Q_k \subset B_k^\star$. Ponadto

$$|Q_k|^{-1} \int_{Q_k^\star} f(x)\, dx \approx |B_k^\star|^{-1} \int_{B_k^\star} f(x)\, dx \approx \alpha.$$

**2.6.** Niech $f$ bdzie funkcj cakowalna na $\mathfrak{g}$, a $\alpha > 0$. Istnieje wtedy cig kul $B_k^\star$ taki e

(a)
$$\sum_{k=1}^{\infty} |B_k^\star| \le \frac{c}{\alpha} \|f\|_1$$

i rozkad funkcji

$$f = g + b = g + \sum_k g_k,$$

gdzie $\operatorname{supp} b_k \subset B_k^\star$ oraz

(b)
$$\int b_k(x)\, dx = 0, \qquad |B_k^\star|^{-1} \int |b_k(x)|\, dx \le c\alpha,$$

a ponadto

(c)
$$|g(x)| \le c\alpha.$$

Staa $c > 0$ nie zaley od $f$.

**2.7. Dowd:** Niech $B_k \subset Q_k \subset B_k^\star$ bd jak w lemacie Calderóna-Zygmunda dla funkcji $|f|$ i staej $\alpha > 0$. Przede wszystkim

$$\sum_k |B_k^\star| \le 3^{2n+1} \sum_k |B_k| \le |\Omega| \le \frac{C}{\alpha} \int_\Omega |f(y)|\, dy,$$

co pociga wasno (a). Zdefiniujmy

$$b_k(x) = \begin{cases} f(x) - \fint_{Q_k} f, & x \in Q_k, \\ 0, & x \notin Q_k, \end{cases}$$

oraz $g = f - \sum_k b_k$. Wasnoci (b), (c) atwo wynikaj z definicji, z punktu b) lematu C-Z oraz z Wniosku 1.13.

## 3. Lemat Cotlara-Steina

**3.1.** Istniej dwie podstawowe ,,metody" dowodzenia ograniczonoci operatorw liniowych na przestrzeni $L^2(\mathfrak{g})$. Jedna z nich opiera si na jakiej postaci transformaty Fouriera i wystpuje w wielu wariantach zalenych od sytuacji. Druga jest cakowicie abstrakcyjna pod wzgldem treci, ale za to konkretna w swojej formie. Przedstawimy tu obie metody, zaczynajc od drugiej.

**3.2. Lemat Cotlara-Steina.** Niech $T_1, T_2, \dots T_N, \dots$ bdzie cigiem ograniczonych operatorw na przestrzeni Hilberta. Jeli istnieje staa $M > 0$, taka e

$$\forall k \quad \sum_{j=1}^{N} \|T_j^\star T_k\|^{1/2} \le M, \qquad \forall j \quad \sum_{j=1}^{N} \|T_j T_k^\star\|^{1/2} \le M,$$

to dla kadego $N$

$$\|\sum_{k=1}^{N} T_k\| \le M.$$

Wtedy te szereg jest mocno zbieny.

**3.3. Dowd:** Przyjmijmy, e $T_k = 0$ dla $K > N$ i pomy

$$\gamma(j,k) = \max\left(\|T_j^\star T_k\|^{1/2}, \|T_j T_k^\star\|^{1/2}\right) \qquad j, k \in \boldsymbol{N}.$$

Wtedy

(#)
$$\forall k \quad \sum_{j=1}^{\infty} \gamma(j,k) \le M, \qquad \forall j \quad \sum_{j=1}^{\infty} \delta(j,k) \le M,$$

Dla operatora $T = \sum_{k=1}^{N} T_k$ skorzystamy ze wzoru

$$\|T\|^2 = \|T^\star T\| = \lim_{m\to\infty} \|(T^\star T)^m\|^{1/m}.$$

Mamy

$$(T^\star T)^m = \sum_{j_1,j_2,\dots,j_{2m}} T^\star_{j_1} T_{j_2} T^\star_{j_3} \dots T^\star_{j_{2m-1}} T_{j_{2m}} = \sum_{j_1,j_2,\dots,j_{2m}} T_{j_1,j_2,\dots,j_{2m}}.$$

Std

$$\|T_{j_1,j_2,\dots,j_{2m}}\| \le \prod_{k=1}^{m} \gamma(j_{2k-1}, j_{2k})^2$$

oraz

$$\begin{aligned} \|T_{j_1,j_2,\dots,j_{2m}}\| &\le \|T_{j_1}\| \prod_{k=1}^{m-1} \gamma(j_{2k}, j_{2k+1})^2 \|T_{j_{2m}}\| \\ &\le M^2 \prod_{k=1}^{m-1} \gamma(j_{2k}, j_{2k+1})^2. \end{aligned}$$

Biorc redni geometryczn z ostatnich dwch oszcowa, otrzymujemy

$$\|T_{j_1,j_2,\dots,j_{2m}}\| \le M \prod_{r=1}^{m-1} \gamma(j_r, j_{r+1}),$$

skd

$$\|(T^\star T)^m\| \le M^{2m} \sum_{j_{2m}} 1 = N M^{2m}$$

i ostatecznie

$$\|T\| = \lim_{m\to\infty} \|(T^\star T)^m\| \le \lim_{m\to\infty} N^{1/2m} M = M.$$

Przypumy nie wprost, e dla pewnego wektora $\|x\| = 1$ szereg $\sum_k T_k x$ jest rozbieny. Istniej wtedy cigi indeksw $n_k < m_k < n_{k+1}$ i liczba $c > 0$, takie e

$$\|y_k\| = \| \sum_{j=m_k}^{n_k} T_j x\| \ge c.$$

Z rwnoci rwnolegoboku wynika, e dla kadego $L$ istnieje cig $\varepsilon_k = \pm 1$, taki e

$$\sum_{k=1}^{L} \|y_k\|^2 \le \| \sum_{k=1}^{L} \varepsilon_k y_k\|^2.$$

Zatem istnieje skoczony zbir (niekoniecznie kolejnych) indeksw $J \subset \boldsymbol{N}$ i cig $\varepsilon_j = \pm 1$, taki e

$$\| \sum_{j\in J} \varepsilon_j T_j \| \ge \| \sum_{j\in J} \varepsilon_j T_j x\| > M,$$

a to przeczy tezie lematu Cotlara-Steina, bo operatory $\varepsilon_j T_j$ rownie speniaj jego zaoenia.

**3.4.** Niech $k : \mathfrak{g} \setminus \{0\} \to \boldsymbol{C}$ bdzie funkcj jednorodn stopnia $-Q$, rniczkowaln w sposb cigy i speniajc warunek skracania

$$\int_{1\le|x|\le 2} k(x)\, dx = 0.$$

Niech dla kadego $j \in \boldsymbol{Z}$

$$k_j(x) = k(x)\chi_j(x),$$

gdzie $\chi_j$ jest funkcj charakterystyczn zbioru $2^j \le |x| < 2^{j+1}$. Wtedy operatory

$$T_j f(x) = \int_{\mathfrak{g}} f(xy) k_j(y)\, dy$$

speniaj zaoenia lematu Cotlara-Steina.

**3.5. Dowd:** Mamy

$$T_i^\star T_j f(x) = \int_{\mathfrak{g}} f(xy) G_{ij}(y)\,dy, \qquad T_i T_j^\star f(x) = \int_{\mathfrak{g}} f(xy) H_{ij}(y)\,dy,$$

gdzie

$$G_{ij} = k_i^\star \star k_j, \qquad H_{ij} = k_i \star k_j^\star$$

oraz

$$\|T_i^\star T_j\| \le \|G_{ij}\|_1, \qquad \|T_i T_j^\star\| \le \|H_{ij}\|_1,$$

a ponadto

$$\widetilde{H}_{ij} = \bar{k}_j \star \widetilde{k}_i.$$

Wida wic, skoro bdziemy szacowa normy $L^1$, e mona si ograniczy do przypadku $k_i \star l_j$, gdzie $k$ i $l$ s funkcjami speniajcymi zaoenia twierdzenia, a $j \ge i$. Zauwamy jeszcze, e normy

$$\|k_i \star l_j\|_1 \le \|k_k\|_1 \|l_j\|$$

s wsplnie ograniczone, wic mona jeszcze przyj, e $j \ge i + 2$. Zamierzamy zatem pokaza, e

$$\|k_i \star l_j\|_1 \le C 2^{i-j}, \qquad j \ge i + 2.$$

Mamy

$$k_i \star l_j(x) = \int k_i(y) l_j(y^{-1}x)\,dy,$$

gdzie efektywne cakowanie odbywa si w zbiorze wyznaczonym nierwnociami

$$2^i \le |y| < 2^{i+1}, \qquad 2^j \le |y^{-1}x| < 2^{j+1}, \qquad j \ge i+2,$$

ktre pocigaj

$$|x| \le |y^{-1}x| + |y| < 2^{j+1} + |y| \le (2^{j-i+1} + 1)|y| \le 2^{j-i+2}|y|$$

oraz

$$|x| \ge |y^{-1}x| - |y| \ge 2^j - |y| = (2^{j-i-1} - 1)|y| \ge 2^{j-i-1}|y|.$$

Zatem, korzystajc jeszcze z warunku skracania, otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\|k_i \star l_j\|_1 &\le \int_{2^i \le |y| \le 2^{i+1}} |k_i(y)| \int_{2^{j-i+1} \le |x| < 2^{j-i+2}} |l_j(y^{-1}x) - l_j(x)|\,dx\,dy \\
&\le C \int_{2^i \le |y| \le 2^{i+1}} |y| |k_i(y)| \int_{2^{j-i+1}|y| \le |x| < 2^{j-i+2}|y|} |x|^{-Q-1}\,dx\,dy \\
&\le C_1 2^{i-j}.
\end{aligned}$$

Pokazalimy zatem, e istnieje staa $M$, taka e dla wszelikich $i, j \in \boldsymbol{Z}$

$$\|T_i^\star T_j\| + \|T_i T_J^\star\| \le M 2^{|i-j|},$$

co wystarcza do tego, by operatory speniay warunek lematu Cotlara-Steina.

**3.6. Wniosek.** Przy zaoeniach (3.4) cig operatorw splotowych

$$\boldsymbol{K}_n f(x) = \int_{2^{-n} \le |y| < 2^n} f(xy) k(y)\,dy$$

jest mocno zbieny, gdy $n \to \infty$, do operatora splotu z dystrybucj

$$\langle K, f \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|y| \ge \varepsilon} f(y) k(y)\,dy.$$

## 4. Za pomoc twierdzenia Plancherela

**4.1. Uwaga.** Jak wspomniano wyej, drugi spsb uzyskiwania ograniczonoci na $L^2$ zwizany jest z transformat Fouriera. To, co przedstawimy w tym rozdziale dotyczy przede wszystkim grupy Heisenberga i opiera si na twierdzeniu Plancherela oraz twierdzeniu typu Calderóna-Vaillencourta dotyczcym ograniczonoci na $L^2$ operatorw pseudorniczkowych.

**4.2.** Niech funkcja $k : \mathfrak{g} \setminus \{0\} \to \boldsymbol{C}$ bdzie osobliwym jdrem cakowym o wasnociach:

a) $k$ jest jednorodna stopnia $-Q$,

b) $k \in C^\infty(\mathfrak{g} \setminus \{0\})$,

c) $\int_{1\le|x|\le 2} k(x)\, dx = 0$.

Niech $\psi \in C^\infty(\mathfrak{g})$ bdzie rwna 1 dla $|x| \le 1$ i 0 dla $|x| \ge 2$. Niech

$$\varphi_j(x) = \psi(\delta_{1/2j}x) - \psi(\delta_j x), \qquad x \in \mathfrak{g}.$$

Jak wida nonik $\varphi_j$ jest zawarty w piercieniu $1/2j \le |x| \le 2j$ i $\varphi_j(x) = 1$ dla $1/j \le |x| \le j$.

**4.3.** Bezporednim rachunkiem sprawdzamy, e funkcje pochodne $k_j = \varphi_j k$ speniaj jednostajnie nastpujce oszacowania

$$|D^\alpha k_j(x)| \le C_\alpha |x|^{-Q-|\alpha|}, \qquad x \in \mathfrak{g},$$

a std wyprowadzamy oszacowania pochodnych ich transformat Fouriera

(*) $$|D^\alpha \widehat{k}_j(x)| \le C_\alpha |x|^{-|\alpha|},$$

gdzie dualna do przestrzeni wektorowej $\mathfrak{g}$ zostaa utosamiona z $\mathfrak{g}$.

**4.4.** Teraz ograniczymy si do grupy Heisenberga, by w nastpnym rozdziale powrci jeszcze do twierdze o osobliwych operatorach cakowych na grupach jednorodnych.

**4.5. Stwierdzenie.** Niech $F \in C_c^\infty(\mathfrak{g})$ i $\lambda \in \boldsymbol{R} \setminus \{0\}$. Wtedy

$$\pi_F^\lambda u(x) = \iint e^{-2\pi i(x-y)\xi} a_\lambda\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) u(y)\, d\xi\, dy, \qquad u \in \mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n),$$

gdzie

$$a_\lambda(z,\xi) = \widehat{F}\Big(\sqrt{\lambda}\xi, \sqrt{\lambda}z, \lambda\Big), \qquad \lambda > 0,$$

oraz

$$a_\lambda(z,\xi) = \widehat{F}\left(\sqrt{|\lambda|}z, \sqrt{|\lambda|}\xi, \lambda\right), \qquad \lambda < 0.$$

Innymi sowy, $\pi_F^\lambda$ jest operatorem pseudorniczkowym z symbolem Weyla $a_\lambda$, co si krtko zapisuje jako $\pi_F^\lambda = a_\lambda^w(x, D)$.

**4.6. Twierdzenie Calderóna-Vaillencourta.** Niech $a \in \mathcal{S}(\boldsymbol{R}^{2n})$ i $s > n/2$. Wtedy norma operatora $A = a^w(x,D) : L^2(\boldsymbol{R}^n) \to L^2(\boldsymbol{R}^n)$ spenia oszacowanie

$$\|A\| \le C \max_{|\alpha|+|\beta|\le s} \sup_{(x,\xi)\in\boldsymbol{R}^{2n}} |D_\xi^\alpha D_x^\beta a(x,\xi)|$$

**4.7.** Istniej rne dowody twierdzenia C-V z rozmaitymi wariantami zaoe dotyczcymi iloci pochodnych, ktre maj spenia warunki. Rni si one take co do charakteru samych warunkw. Niektre z nich opieraj si na lemacie Cotlara-Steina, ale te najsubtelniejsze korzystaj z transformaty Fouriera.

**4.8.** Jeli zmienn w grupie $\mathbf{H}$ i oznaczymy przez $(\xi, x, \lambda)$, to wzr (*) mona zapisa w postaci

$$|D_\xi^\alpha D_x^\beta D_\lambda^\gamma \widehat{k}_j(\xi,x,\lambda)| \le C_{\alpha\beta\gamma}\big(|\xi| + |x| + |\lambda|^{1/2}\big)^{-|\alpha|-|\beta|-|\gamma|}.$$

**4.9. Twierdzenie.** Niech $k$ bedzie osobliwym jdrem cakowym na $\mathbf{H}$ opisanym w (4.2). Wwczas operatory $T_j f = f \star \widetilde{k}_j$ s wsplnie ograniczone w normie na $L^2(\mathbf{H})$ i cig $T_j$ jest mocno zbieny do ograniczonego operatora $T$, ktry jest przedueniem operatora splotu $\boldsymbol{K} f = f \star \widetilde{k}$.

**4.10. Dowd:** Na mocy Stwierdzenia 4.5 dla kadego $\lambda > 0$ operator $\pi^\lambda_{k_j}$ jest operatorem pseudorniczkowym o symbolu

$$a_\lambda(x,\xi) = \widehat{k}_j(|\lambda|^{1/2}\xi, |\lambda|^{1/2}x, \lambda),$$

co w poczeniu z Twierdzeniem 4.6 i (4.8) daje

$$\|\pi^\lambda_{k_j}\| \le C, \qquad \lambda > 0.$$

Podobne oszacowanie obowizuje dla $\lambda < 0$. Wsplne ograniczenie norm w reprezentacjach $\pi^\lambda$ stanowicych nonik miary Plancherela, pociga $\|T_j\| \le C$, a wic nasz tez.

**4.11. Wniosek.** Jeli $A$ jest dystrybucj na $\mathbf{H}$, tak e transformata Fouriera $\widehat{A}$ jest funkcj gadk na $\mathbf{H}^\star = \mathbf{H}$ i spenia oszacowania

$$|D^\alpha_\xi D^\beta_x \widehat{A}(\xi, x, \lambda)| \le C_{\alpha\beta} |\lambda|^{-|\alpha|-\beta|},$$

to operator $f \star \widetilde{A}$ okrelony zrazu na funkcjach klasy Schwartza przedua si do ograniczonego operatora splotowego na $L^2(\mathbf{H})$.

**4.12. Uwaga.** Dowd wniosku wymaga tylko uzupenienia przeprowadzonych wyej rozumowa, co pozostawiamy Czytelnikowi.

## 5. Mnoniki

**5.1.** Na grupach jednorodnych mona te pyta o mnoniki przestrzeni $L^p(\mathfrak{g})$. Dla $f, g \in \mathcal{S}(\mathfrak{g})$ definiujemy

$$f\#g(y) = (f^\vee \star g^\vee)^\wedge$$

Operacja $\#$ nie jest oczywicie zwykym mnoeniem. Tym niemniej mona rozwaa operatory

$$Tf(x) = \int_{\mathfrak{g}} e^{2\pi i x y} \widehat{f}\#m(y)\, dy$$

i pyta o wasnoci mnonika $m$, ktre zapewniaj cigo $T$ na odpowiedniej przestrzeni. Wniosek 4.11 sugeruje nastpujce twierdzenie, ktrego dowd mona znale w [4].

**5.2. Twierdzenie.** Niech $A$ bdzie dystrybucj na grupie jednorodnej $\mathfrak{g}$, ktrej transformata Fouriera jest funkcj gadk dla $x_d \ne 0$ i spenia oszacowania

$$|D^\alpha \widehat{A}(x)| \le C_\alpha \prod_{k=1}^{d} \Big( |x_{k+1}| + \cdots + |x_d| \Big)^{-|\alpha_k|}, \qquad x_d \ne 0.$$

Wtedy operator $f \mapsto f \star \widetilde{A}$ przedua si do operatora ograniczonego na $L^2(\mathfrak{g})$.

**5.3.** Do podobne warunki na transformat speniaj te jdra flagowe wprowadzone w [9]. W pracach [10] i [5] niezalenie udowodniono takie oto twierdzenie.

**5.4. Twierdzenie.** Niech $A$ bdzie dystrybucj na grupie jednorodnej $\mathfrak{g}$, ktrej transformata Fouriera jest funkcj gadk dla $x_d \ne 0$ i spenia oszacowania

$$|D^\alpha \widehat{A}(x)| \le C_\alpha \prod_{k=1}^{d} \Big( |x_k| + |x_{k+1}| + \cdots + |x_d| \Big)^{-|\alpha_k|}, \qquad x_d \ne 0.$$

Wtedy operator $f \mapsto f \star \widetilde{A}$ przedua si do operatora ograniczonego na $L^p(\mathfrak{g})$ dla $1 < p < \infty$.

**5.5. Uwaga.** Jak wida, warunki, ktre si zakada przypominaj warunki twierdze mnonikowych Marcinkiewicza i Hörmandera.

**5.6. Przykad.** Najprostszym nietrywialnym przykadem nietrywialnego jdra flagowego jest dystrybucja

$$< K, f >= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|>\varepsilon} \int \frac{y f(x,y)\, dy dx}{x(x^2+y^2)}$$

na $\boldsymbol{R}^2$. Zbieno caki zapewnia nieparzysto jdra ze wzgldu na kad zmienn z osobna. Zwrmy uwag, e caa prosta $x = 0$ skada si z osobliwoci.