Jacek Dziubański
Instytut Matematyczny
Uniwersytet Wrocławski

Wstęp do analizy harmonicznej na grupie Heisenberga

Zimowa Szkoła z Analizy Harmonicznej, Będlewo, 19.03-23.03.2011

Grupę Heisenberga przedstawimy jako konkretną grupę rzeczywistych macierzy kwadratowych z działaniem mnożenia macierzy. Jednakże zacznijmy od pewnych ogólnych faktów dotyczących grup macierzowych.

1. Grupy macierzowe

Niech $M_n(\mathbb{R})$ oznacza przestrzeń rzeczywistych macierzy $n \times n$, $GL(n, \mathbb{R})$ podzbiór macierzy odwracalnych.

Odwzorowanie eksponencjalne

$$\exp A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \tag{1.1}$$

jest zdefiniowane dla wszystkich elementów $M_n(\mathbb{R})$ w $G(n, \mathbb{R})$. Nie jest ono ani iniekcją ani surjekcją, ale jest lokalnym dyfeomorfizmem w otoczeniu zera.

Bardzo ważną identycznością dotyczącą exp jest wzór Campbella-Hausdorffa:

$$\exp A \exp B = \exp(A + B + \frac{1}{2}[A, B] + ...), \tag{1.2}$$

gdzie $[A, B] = AB - BA$ (*komutator* A i B), a za kropkami się kryją komutatory wyższych rzędów ze współczynnikami. Wzór ten ma ogólnie sens dla A i B bliskich zero, choć czasami ma on sens dla wszystkich macierzy z pewnej podalgebry Liego.

Z definicji, algebrą Liego nazywamy przestrzeń wektorową V wyposażoną w odwzorowanie dwuliniowe $[\ ,\ ] : V \times V \to V$, które spełnia:

$$[x, y] = -[y, x], \tag{1.3}$$

$$[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0 \quad \text{(tożsamość Jacobiego)} \tag{1.4}$$

I tak $M_n(\mathbb{R})$ tworzy z $[A, B] = AB - BA$ algebrę Liego oznaczaną $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$.

Jest ścisły związek pomiędzy domkniętymi spójnymi podgrupami $GL(n, \mathbb{R})$ i podalgebrami $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ mianowicie

1.5. **Twierdzenie.** *Niech G będzie domkniętą spójną podgrupą $GL(n, \mathbb{R})$. Wówczas zbiór $\mathfrak{g} = \{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) : \exp A \in G\}$ jest podalgebrą Liego $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$.*

Ponadto grupa G jest abelowa wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{g}$ jest abelowa ($[A, B] = 0$).

Uwaga. Izomorficzność algebr Liego dwóch grup nie pociąga izomorficzności tych grup.

2. Algebra Heisenberga

Algebra Heisneberga $\mathfrak{h}_n$ jest to podalgebra Liego algebry $\mathfrak{gl}(n+2,\mathbb{R})$ złożona z macierzy postaci

$$\begin{bmatrix} 0 & x_1 & . & . & . & x_n & t \\ 0 & . & . & . & . & 0 & y_1 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . & 0 & y_n \\ 0 & . & . & . & . & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

Będziemy je oznaczać (x,y,t). Mamy

$$[(x,y,t),(x'y't')] = (0,0,x\cdot y' - x'\cdot y), \tag{2.7}$$

gdzie $x\cdot y$ oznacza iloczyn skalarny.

Widzimy, że $\mathfrak{h}_n$ jest algebra Liego i komutatory wyższych rzędów są zero. Jest to algebra nilpotentna stopnia 2.

Sprawdzamy, że

$$\exp\begin{bmatrix} 0 & x_1 & . & . & . & x_n & t \\ 0 & . & . & . & . & 0 & y_1 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . & 0 & y_n \\ 0 & . & . & . & . & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & . & . & . & x_n & t+\frac{1}{2}x\cdot y \\ 0 & 1 & . & . & . & 0 & y_1 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . & 1 & y_n \\ 0 & . & . & . & . & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.8}$$

Odwrotnie, każda macierz postaci

$$\begin{bmatrix} 1 & a_1 & . & . & . & a_n & c \\ 0 & 1 & . & . & . & 0 & b_1 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . & 1 & b_n \\ 0 & . & . & . & . & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

jest eksponentem dokradnie jednej macierzy z $\mathfrak{h}_n$

Grypą Heisenberga H_n nazywamy grupę macierzy postaci (2.9). Jest to spójna jednospójna podgrupa $GL(n+2)$ dyfeomorficzna z $\mathbb{R}^{2n+1}$ odwzorowaniem

$$\mathfrak{h}_n \ni (x,y,t) \mapsto \exp(x,y,t) \in H_n.$$

Ze względu na to, ze komutatory wyższych rzędów znikają, ze wzoru Campbella-Hausdorffa mamy

$$\begin{aligned} \exp(x,y,t)\exp(x',y',t') &= \exp((x,y,t)+(x',y',t')+\frac{1}{2}[(x,y,t),(x',y',t')]) \\ &= \exp(x+x',y+y',t+t'+\frac{1}{2}(x\cdot y' - x'\cdot y)). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Opuszczając exp grupę Heisenberga możemy utożsamić z $\mathbb{R}^{2n+1}$ z działaniem (mnożeniem)

$$(x,y,t)(x',y',t') = (x+x',y+y',t+t'+\frac{1}{2}(x\cdot y' - x'\cdot y)) \tag{2.11}$$

Centrum Z tej grupy tworzą elementy $(0, 0, t)$. Mamy $H_n/Z = \mathbb{R}^{2n}$.

3. Elementy teorii reprezentacji

Niech $\mathcal{H}$ będzie przestrzenią Hilberta nad $\mathbb{C}$ i niech $U(\mathcal{H})$ będzie grupą odwzorowań unitarnych na $\mathcal{H}$.

Przez odwzorowanie unitarne pomiędzy dwiema przestrzeniami Hilberta rozumiemy ich surjektywną izometrię liniową.

Reprezentacją unitarną grupy topologicznej G nazywamy homomorfizm π z G w $U(\mathcal{H})$, taki, że dla każdego $v \in \mathcal{H}$ odwzorowanie $G \ni g \mapsto \pi(g)v \in \mathcal{H}$ jest ciągłe.

Domkniętą podprzestrzeń $\mathcal{H}_0$ przestrzeni $\mathcal{H}$ nazywamy niezmienniczą, gdy $\pi(g)(\mathcal{H}_0) \subset \mathcal{H}_0$ dla każdego $g \in G$.

Reprezentacja jest *nieprzywiedlna*, gdy nie ma właściwych podprzestrzeni niezmienniczych.

Jeśli $\mathcal{H}_0$ jest podprzestrzenią niezmienniczą, to $\mathcal{H}_0^\perp$ jest także niezmienniczą podprzestrzenią. Wówczas π jest sumą prostą dwóch reprezentacji π_1 na $\mathcal{H}_0$ i π_2 na $\mathcal{H}_0^\perp$.

Reprezentacje unitarne $(\pi_1, \mathcal{H}_1)$ i $(\pi_2, \mathcal{H}_2)$ nazywamy unitarnie równoważne, gdy istnieje operator unitarny $U : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$, że

$$\pi_2(g)U = U\pi_1(g).$$

Operator U nazywa sią splatającym.

Jeśli π jest sumą prosta reprezentacji $(\pi_1, \mathcal{H}_1)$ i $(\pi_2, \mathcal{H}_2)$ wówczas operator $(x_1, x_2) \mapsto (e^{i\theta_1}x_1, e^{i\theta_2}x_2)$ jest unitarny i splatający π z π.

3.12. **Lemat** (Schur)**.** *Unitarna reprezentacja π jest nieprzywiedlna, wtedy i tylko wtedy, gdy każdy operator splatający π z π jest wielokrotnością identyczności.*

Jeśli π jest unitarna reprezentacją G i $\xi, \eta \in \mathcal{H}$, to funkcja φ na G zadana wzorem

$$\varphi(g) = \langle \pi(g)\xi, \eta \rangle$$

nazywa sie elementem macierzowym π. Mamy, że ϕ jest ciągła i $|\phi(g)| \leq \|\xi\|\|\eta\|$.

Dwie unitarnie równoważne reprezentacje mają te same współczynniki macierzowe.

Zachodzi następujące częściowe twierdzenie odwrotne

3.13. **Twierdzenie.** *Niech $(\pi_1, \mathcal{H}_1)$ i $(\pi_2, \mathcal{H}_2)$ będą nieprzywiedlnymi i unitarnymi reprezentacjami G. Jeśli mają choć jeden ten sam diagonalny współczynnik macierzowy, to są równoważne.*

D o w ó d. Niech ξ_1 i ξ_2 będą takie, że $\langle \pi_1(g)\xi_1, \xi_1 \rangle = \langle \pi_2(g)\xi_1, \xi_2 \rangle$. Wówczas przestrzeń Hilberta generowana przez wektory $\pi_1(g)\xi_1$ jest $\mathcal{H}_1$. Czyli wektory $\xi =$

$\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\pi_1(g_j)\xi_1$ leżą gęsto w $\mathcal{H}_1$. Identycznie jest dla $\mathcal{H}_2$. Zdefiniujemy operator

$$U\xi=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\pi_2(g_j)\xi_2,\quad \xi=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\pi_1(g_j)\xi_1.$$

Operator jest dobrze zdefiniowany. Istotnie, jeśli $0=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\pi_1(g_j)\xi_1$, to

$$\begin{aligned}&\langle\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\pi_2(g_j)\xi_2,\pi_2(g)\xi_2\rangle=\langle\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\pi_2(g)^*\pi_2(g_j)\xi_2,\xi_2\rangle\\ &=\langle\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\pi_2(g^{-1}g_j)\xi_2,\xi_2\rangle=\langle\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\pi_1(g^{-1}g_j)\xi_1,\xi_1\rangle\\ &=\langle\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\pi_1(g)^*\pi_1(g_j)\xi_1,\xi_1\rangle=\langle\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\pi_1(g_j)\xi_1,\pi_1(g)\xi_1\rangle=0.\end{aligned}\tag{3.14}$$

Następnie U jest izometrią.

$$\begin{aligned}&\|U\xi\|^2=\sum_{j,k}\alpha_j\bar{\alpha}_k\langle\pi_2(g_j)\xi_2,\pi_2(g_k)\xi_2\rangle\\ &=\sum_{j,k}\alpha_j\bar{\alpha}_k\langle\pi_2(g_k^{-1}g_j)\xi_2,\xi_2\rangle=\sum_{j,k}\alpha_j\bar{\alpha}_k\langle\pi_1(g_k^{-1}g_j)\xi_1,\xi_1\rangle=\|\xi_1\|^2\end{aligned}\tag{3.15}$$

Zatem U rozszerza się do izometrii $\mathcal{H}_1$ na $\mathcal{H}_2$ (gęstość). Ponadto U jest splatający. Istotnie,

$$U\pi_1(g)\xi=U(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\pi_1(gg_j)\xi_1))=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\pi_2(gg_j)\xi_2=\pi_2(g)U\xi.\tag{3.16}$$

4. Nieprzywiedlne reprezentacje grupy Heisenberga - wprowadzenie

Niech π będzie unitarną nieprzywiedlna reprezentacją H_n. Wówczas każdy z operatorów $\pi(0,0,t)$ splata π. Zatem ze lematu Schura $\pi(0,0,t)=\chi(t)I$, $|\chi(t)|=1$, χ jest ciągła funkcją t spełniającą $\chi(t)\chi(s)=\chi(t+s)$. Zatem $\chi(t)=e^{i\lambda t}$ dla pewnego (dokładnie jednego) $\lambda\in\mathbb{R}$.

Jeśli $\lambda=0$, to $\pi(0,0,t)=I$. Uzyskaliśmy, że $\rho(x,y)=\pi(x,y,0)=\pi(x,y,t)$ jest nieprzywiedlną reprezentacją $\mathbb{R}^{2n}$ i jest więc jednowymiarową reprezentacją postaci

$$\rho(x,y)=e^{i(\xi\cdot x+\eta\cdot y)},$$

gdzie $\xi,\eta\in\mathbb{R}^n$. Więc $\pi(x,y,t)=e^{i(\xi\cdot x+\eta\cdot y)}$.

Opis reprezentacji dla $\lambda\neq 0$ wymaga dalszych rozważań.

5. Różniczkowanie reprezentacji

Mimo, że poniższe rozważania dotyczą ogólnych grup Liego, niemniej jednak powróćmy do domkniętych spójnych podgrup $GL(n,\mathbb{R})$. Dla takiej grupy G rozważmy odwzorowanie $\exp:\mathfrak{g}\to G$ i unitarną reprezentację π. Wówczas dla $X\in\mathfrak{g}$ rodzina $\{\exp(tX):t\in\mathbb{R}\}$ tworzy jednoparametrową grupę w G, $\exp(tX)\exp(sX)=$

$\exp((s+t)X)$. Element X jest jej generatorem infinitezymalnym: $X = \frac{d}{dt}\exp(tX)_{|t=0}$. Jeśli reprezentacja π jest skończonego wymiaru, to definiujemy

$$d\pi(X) = \frac{d}{dt}\pi(\exp tX)_{|t=0}.$$

Z tego, że π jest unitarna $d\pi(X)$ jest skośnie Hermitowska:

$$d\pi(X)^* = -d\pi(X)$$

i spełnia

$$d\pi([X,Y]) = [d\pi(X), d\pi(Y)].$$

Czyli $d\pi$ jest reprezentacją algebry Liego $\mathfrak{g}$.

Jeśli reprezentacja jest nieskończenie wymiarowa, to mamy pewną przeszkodę w definicji $d\pi(X)$.

Mówimy, że (być może nieograniczony) operator A z dziedzina $D(A)$ jest skośnie-sprzężony, gdy iA jest samosprzężony. Jeśli $\{U_t\}$ jest grupą operatorów unitarnych, to jej generatorem infinitezymalnym nazywamy operator

$$A\xi = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(U_t\xi - \xi),$$

z dziedziną $D(A)$ złożona z tych ξ dla których powyższa granica istnieje w normie. Dziedzina jest gęsta a operator A domknięty.

5.17. **Twierdzenie** (Stone)**.** *Generator grupy operatorów unitarnych jest skośnie sprzężony. Odwrotnie, każdy skośnie sprzężony operator A na $\mathcal{H}$ generuje dokładnie jedną grupę operatorów unitarnych.*

Element $\xi \in \mathcal{H}$ nazywamy wektorem C^∞ reprezentacji π, gdy odwzorowanie $G \ni g \mapsto \pi(g)\xi \in \mathcal{H}$ jest C^∞.

5.18. **Twierdzenie.** *Zbiór wektorów C^∞ dla π (zwany także przestrzenią Gårdinga) jest gęsty i zawarty w dziedzinie $d\pi(X)$ dla $X \in \mathfrak{g}$. Ponadto jest on zachowywany przez $d\pi(X)$.*

Pozwala to zdefiniować złożenia $d\pi(X)d\pi(Y)$ na wektorach C^∞. Mamy

$$d\pi([X,Y])\xi = d\pi(X)d\pi(Y)\xi - d\pi(Y)d\pi(X)\xi, \quad \xi \in C^\infty(\pi).$$

Weźmy $G = H_n$. Bazą $\mathfrak{h}_n$ są wektory

$$X_j = (e_j, 0, 0), \quad Y_j = (0, e_j, 0), \quad T = (0,0,1).$$

Łatwo sprawdzić, że mamy

$$[X_i, X_j] = [Y_i, Y_j] = [X_i, T] = [Y_i, T] = 0, \quad [X_i, Y_j] = \delta_{ij}T.$$

Przykład. Niech $\rho_g f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}g)$ będzie prawą regularną reprezentacją grupy H_n. Wówczas dla $X \in \mathfrak{h}_n$ mamy

$$d\rho(X)f(x,y,t) = \frac{d}{ds}\rho(\exp sX)f(x,y,t)_{|s=0} = \frac{d}{ds}f((x,y,t)\exp sX)_{|s=0}.$$

I tak dla $X = X_j = (e_j, 0, 0)$ mamy $\exp(sX_j) = (se_j, 0, 0)$ i dalej

$$\begin{aligned} d\rho(X_j)f(x,y,t) &= \frac{d}{ds} f((x,y,t)(se_j,0,0))_{|s=0} \\ &= \frac{d}{ds} f((x+se_j, y, t - \frac{1}{2}sy_j)_{|s=0} = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x,y,t) - \frac{1}{2}y_j \frac{\partial f}{\partial t}(x,y,t) \end{aligned} \tag{5.19}$$

Podobnie

$$d\rho(Y_j)f(x,y,t) = \frac{\partial f}{\partial y_j}(x,y,t) + \frac{1}{2}x_j \frac{\partial f}{\partial t}(x,y,t), \quad d\rho(T)f(x,y,t) = \frac{\partial f}{\partial t}(x,y,t).$$

Mamy więc lewostonnie niezmiennicze pola wektorowe

$$X_j = \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{1}{2}y_j \frac{\partial}{\partial t}, \; Y_j = \frac{\partial}{\partial y_j} + \frac{1}{2}x_j \frac{\partial}{\partial t}, \; T = \frac{\partial}{\partial t},$$

które utożsamiamy z bazą algebry Liego $\mathfrak{h}_n$. Spełniają one te same warunki komutowania.

6. Reprezentacje Schrödingera

Niech $(\pi, \mathcal{H})$ będzie unitarną reprezentacją H_n, taką, że $\pi(0,0,t) = e^{i\lambda t} I$, $\lambda \neq 0$ (zakładamy, że taka istnieje). Wówczas $d\pi(T) = i\lambda I$. Jest to operator ograniczony. Dla wektorów ξ z C^∞ mamy

$$[d\pi(X_j), d\pi(Y_j)]\xi = i\lambda\xi.$$

Jednakże operatory $d\pi(X_j)$ i $d\pi(Y_j)$ nie mogą być ograniczone, co pokazuje poniższy lemat.

6.20. **Lemat.** *Nie ma ograniczonych skośnie sprzężonych operatorów P i Q, że*

$$[P, Q] = PQ - QP = i\lambda I.$$

Dowód. Indukcyjnie $PQ^n - Q^nP = ni\lambda Q^{n-1}$. Jeśli oba P i Q są ograniczone, to $n|\lambda|\|Q^{n-1}\| \leq 2\|P\|\|Q^{n-1}\|\|Q\|$. Ale $\|Q^n\| \neq 0$. Więc $2\|P\|\|Q\| \geq n|\lambda|$.

W szczególności $\mathcal{H}$ nie może być skończonego wymiaru.

Czy takie operatory P, Q istnieją?

Niech $\lambda = 1$. Rozważmy przestrzeń funkcji $C_c^\infty = C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ (lub $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$) i algebrę operatorów na niej generowaną przez operatory postaci

$$P_j f(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} f(x), \quad Q_j f(x) = ix_j f(x), \quad j = 1, 2, ...n.$$

Sprawdzamy, że spełniają one relacje komutowania

$$[P_j, P_k] = [Q_j, Q_k] = 0, \quad [P_j, Q_k] = \delta_{jk} iI.$$

Jeśli więc rozważymy operatory $P_1, ..., P_n, Q_1, ..., Q_n, iI$, to spełniają one relacje komutowania generatorów algebry $\mathfrak{h}_n$. Formalnie mamy

$$\exp(tQ_i)f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tix_j)^k}{k!} f(x) = e^{itx_j} f(x),$$

$$\exp(tP_j)f(x) = f(x) + t\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) + ... + \frac{t^n}{n!}\frac{\partial^n f}{\partial x_j^n}(x)... = f(x + te_j).$$

Niech $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n)$. Nie ma wątpliwości, że operatory

$$U_t^{(j)}f(x) = f(x + te_j), \quad V_t^{(j)}f(x) = e^{itx_j}f(x)$$

tworzą unitarne grupy jednoparametrowe i klasa $\mathcal{S}$ jest zawarta w dziedzinach generatorów infinitezymalnych.

Skonstruowaliśmy skośnie sprzężoną reprezentację $\mathfrak{h}_n$ na $L^2(\mathbb{R}^n)$. Przejdźmy do konstrukcji odpowiadającej jej reprezentacji grupy H_n. Powyższe relacje sugerują

$$\pi(x, 0, 0)f(\xi) = f(\xi + x), \quad \pi(0, y, 0)f(\xi) = e^{i\xi\cdot y}f(\xi), \quad \pi(0, 0, t) = e^{it}f(\xi).$$

Co prowadzi do

$$\pi(x, y, t)f(\xi) = [\pi(0, 0, t + \frac{1}{2}x \cdot y)\pi(0, y, 0)\pi(x, 0, 0)f](\xi) = e^{i(t+\frac{1}{2}x\cdot y+\xi\cdot y)}f(\xi + x).$$

6.21. **Twierdzenie.** *Powyższy wzór definiuje reprezentację nieprzywiedlną i unitarną grupy H_n na $L^2(\mathbb{R}^n)$.*

D o w ó d . Unitarność, homomorficzność i mocna ciągłość jest łatwa do sprawdzenia. Zajmijmy się nieprzywiedlnośćią. Niech V będzie domkniętą podprzestrzenią niezmienniczą π, P projekcją ortogonalną na V. Mamy $\pi(x, 0, 0)P = P\pi(x, 0, 0)$. Więc P komutuje z translacjami. Zatem $(Pf)\hat{} = \hat{f}m$. Dalej $P^2 = P$, więc $m^2 = m$, co daje, że $m = \chi_E$, $E \subset \mathbb{R}^n$. Także $\pi(0, y, 0)P = P\pi(0, y, 0)$. Więc

$$[P(e^{i\xi\cdot y}f)]\hat{}(\eta) = \hat{f}(\eta - y)m(\eta) = [e^{i\xi\cdot y}Pf]\hat{}(\eta) = \hat{f}(\eta - y)m(\eta - y).$$

Czyli $m(\eta - y) = m(y)$ dla każdego y, η. Co daje, że $m = 1$ lub $m = 0$ prawie wszędzie. A więc V jest niewłaściwą podprzestrzenią.

W podobny sposób dla $\lambda \neq 0$ zdefiniujemy reprezentacje nieprzywiedlna unitarną

$$\pi_\lambda(x, y, t)f(\xi) = e^{i\lambda(t+\frac{1}{2}x\cdot y+\xi\cdot y)}f(\xi + y).$$

Mamy

$$d\pi_\lambda(X_j) = \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad d\pi_\lambda(Y_j) = i\lambda x_j, \quad d\pi_\lambda(T) = i\lambda I.$$

Oczywiście dla $\lambda_1 \neq \lambda_2$ reprezentacje π_{λ_1} i π_{λ_2} nie są równoważne. Dlaczego? Jeśli $\lambda \neq 0$, przestrzenią Gårdinga π_λ jest $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Zachodzi następujące twierdzenie, którego dowód na razie pomijamy.

6.22. **Twierdzenie** (Stone'a - von Neumanna.)**.** *Każda nieskończenie wymiarowa nieprzywiedlna unitarna reprezentacja grupy H_n jest równoważna z reprezentacją π_λ dla pewnego (dokładnie jednego) $\lambda \neq 0$.*

7. Transformata Fouriera na H_n

Miara Lebesgue'a na $H_n \sim \mathbb{R}^{2n+1}$ jest niezmiennicza na lewostronne i pawostronne przesunięcia elementami z H_n, to znaczy,

$$\int_{H_n} f(x,y,t)\,dx\,dy\,dt = \int_{H_n} f((x,y,t)(a,b,c))\,dx\,dy\,dt = \int_{H_n} f((a,b,c)(x,y,t))\,dx\,dy\,dt,$$

lub inaczej jest ona lewostronną i prawostronną miarą Haara H_n, co można łatwo sprawdzić obliczając Jakobiany przekształceń.

Dla $f, g \in L^1(H_n)$ definiujemy ich splot $f * g$ wzorem

$$\begin{aligned} f * g(x,y,t) &= \int_{H_n} f((x,y,t)(x',y',t')^{-1})g(x',y',t')\,dx'dy'dt' \\ &= \int_{H_n} f(x-x', y-y', t-t' - \frac{1}{2}(x\cdot y' - x'\cdot y))g(x',y',t')\,dx'dy'dt'. \end{aligned}$$

Spełnia on nierówność Younga

$$\|f * g\|_{L^r} \le \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}.$$

Dla nieprzywiedlnej unitarnej reprezentacji π grup H_n i $f \in L^1(H_n)$ definiujemy operator $\pi(f)$ na $\mathcal{H}$ wzorem

$$\pi(f)\xi = \int_{H_n} f(x,y,t)\pi(x,y,t)\xi\,dx\,dy\,dt.$$

Trywialnie $\|\pi(f)\| \le \|f\|_{L^1}$ oraz

$$\pi(f * g) = \pi(f)\pi(g).$$

Oczywiście, jeśli $\varphi(g) = f(gg_0)$, to

$$\pi(\varphi) = \pi(f)\pi(g_0)^*.$$

Ponadto, jeśli π_1 i π_2 są unitarnie równoważne, $\pi_2 = U\pi_1 U^{-1}$, to

$$\pi_2(f) = U\pi_1(f)U^{-1}.$$

I dalej dla $X \in \mathfrak{h}_n$ i lewostronnie niezmienniczego pola wektorowego X_l na H_n wyznaczonego przez X , to znaczy, $X_l f(x) = \frac{d}{dt} f(x \exp tX)_{|t=0}$, mamy

$$(\pi(X_l f)(x) = -\pi(f)d\pi(X).$$

Podobnie dla prawego pola wektorowego $(X_p f)(x) = \frac{d}{dt} f((\exp tX)x)_{|t=0}$ mamy

$$(\pi(X_p f)(x) = -d\pi(X)\pi(f).$$

Przez transformatę Fouriera funkcji $f \in L^1(H_n)$ rozumiemy operatory $\hat{f}(\pi) = \pi(f)$, gdzie π przebiega wszystkie klasy równoważności nieprzywiedlnych reprezentacji H_n

8. Wzór Plancherela

Oznaczmy prze $\mathcal{F}_{2,3}f(x,\xi,\lambda)$ operator częściowej transformacji Fouriera po zmiennych (y,t), to znaczy

$$\mathcal{F}_{2,3}f(x,\xi,\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}} f(x,y,t)e^{-i(y\cdot\xi+t\lambda)}\,dy\,dt.$$

8.23. **Lemat.** *Jeśli $f\in L^1(H_n)$, $\lambda\neq 0$, to operator $\pi_\lambda(f)$ jest operatorem całkowym z jądrem*

$$H_\lambda(\xi,\eta) = \mathcal{F}_{2,3}f(\eta-\xi, -\frac{\lambda}{2}(\eta+\xi), -\lambda).$$

D o w ó d. Dla $\varphi\in L^2(\mathbb{R}^n)$ mamy

$$\begin{aligned}
[\pi_\lambda(f)\varphi](\xi) &= \int_{H_n} f(x,y,t)[\pi_\lambda(x,y,t)\varphi](\xi)dx\,dy\,dt \\
&= \int_{H_n} f(x,y,t)e^{i\lambda(t+\frac{1}{2}x\cdot y+\xi\cdot y)}\varphi(\xi+x)\,dx\,dy\,dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}_{2,3}f(x,-\lambda(\frac{x}{2}+\xi),-\lambda)\varphi(\xi+x)\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}_{2,3}f(x-\xi,-\frac{\lambda}{2}(x+\xi),-\lambda)\varphi(x)\,dx.
\end{aligned}\tag{8.24}$$

8.25. **Twierdzenie.** *Jeśli $f\in L^1(H_n)\cap L^2(H_n)$, to dla prawie każdego $\lambda\neq 0$ operatory $\pi_\lambda f$ są Hilberta-Schmidta i*

$$\|f\|^2_{L^2(H_n)} = c_n\int_{\mathbb{R}}\|\pi_\lambda(f)\|^2_{HS}|\lambda|^n\,d\lambda, \quad c_n=(2\pi)^{-n-1}.$$

D o w ó d. Mamy

$$\|\pi_\lambda(f)\|^2_{HS} = \int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}|\mathcal{F}_{2,3}f(\eta-\xi,-\frac{\lambda}{2}(\eta+\xi),-\lambda)|^2\,d\xi\,d\eta.$$

Zamieniając zmienne: $x=\eta-\xi$, $\tau=-\lambda(\xi+\eta)/2$ dostajemy ze wzoru Plancherela:

$$\begin{aligned}
\|\pi_\lambda(f)\|^2_{HS} &= |\lambda|^{-n}\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}|\mathcal{F}_{2,3}f(x,-\tau,-\lambda)|^2\,dx\,d\tau \\
&= (2\pi)^n|\lambda|^{-n}\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}|\mathcal{F}_3 f(x,y,-\lambda)|^2\,dx\,dy.
\end{aligned}\tag{8.26}$$

Mnożąc przez $(2\pi)^{-2n-1}|\lambda|^n$ i całkując po λ mamy tezę (dzięki wzorowi Plancherala).

Miarę $c_n|\lambda|^n\,d\lambda$ nazywamy miarą Plancherela na H_n.

Przypomnijmy, że operatory Hilberta-Schmidta na przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ z norma $\| \ \|_{HS}$ tworzą przestrzeń Hilberta z iloczynem skalarnym $\langle A, B\rangle_{HS} = \mathrm{tr}(AB^*)$.

Jeśli $\mathcal{H} = L^2(M,\, d\mu)$, to operatory te maja postać całkową

$$Af(x) = \int_M K_A(x,y)f(y)\,d\mu(y), \quad Bf(x) = \int_M K_B(x,y)f(y)\,d\mu(y), \quad K_A, K_B \in L^2(M\times M).$$

Wtedy

$$\langle A, B\rangle_{HS} = \mathrm{tr}(AB^*) = \int_{M\times M} K_A(x,y)\overline{K_B(x,y)}\,d\mu(x)\,d\mu(y).$$

Niech $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Oznaczmy przez $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^*)$ przestrzeń Hilberta złożoną z funkcji funkcji $\Phi : \mathbb{R}^* \to HS(L^2(\mathbb{R}^n))$, z normą

$$|||\Phi|||^2 = \int_{\mathbb{R}^*} \|\Phi(\lambda)\|^2_{HS}|\lambda|^n\,d\lambda.$$

Ponieważ opertory HS na $L^2(\mathbb{R}^n)$ mają postać całkową, Φ można utożsamić z funkcja postaci $K(\xi, \eta; \lambda)$. Wtedy

$$|||\Phi|||^2 = \int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^*} |K(\xi,\eta;t)|^2|\lambda|^n d\xi\,d\eta, d\lambda.$$

Ostatecznie dla $\varphi, \psi \in L^2(H_n) \cap L^1(H_n)$ mamy

$$\langle \varphi, \psi\rangle = \int_{H_n} \varphi\bar{\psi} = c_n \int_{\mathbb{R}^*} \mathrm{tr}[\pi_\lambda(\varphi)(\pi_\lambda(\psi))^*]|\lambda|^n\,d\lambda$$

Powyższy wzór nosi nazwę wzoru Plancherela na H_n.

9. Wzór na odwrócenie

Niech $f \in \mathcal{S}(H_n) = \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n+1})$. Niech φ_ε będzie gładka jednością aproksymatywną na H_n (na przykład jądrem Gaussa-Weierstrassa na $\mathbb{R}^{2n+1}$. Wówczas dla $f \in \mathcal{S}(H_n)$ dostajemy

$$\begin{aligned} f(0) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\langle f, \varphi_\varepsilon\rangle \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} c_n \int_{\mathbb{R}^*} \mathrm{tr}[\pi_\lambda(f)\pi_\lambda(\varphi_\varepsilon)^*]|\lambda|^n\,d\lambda \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} c_n \int_{\mathbb{R}^*} \mathrm{tr}[\pi_\lambda(f)\pi_\lambda(\overline{\varphi_\varepsilon})]|\lambda|^n\,d\lambda \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} c_n \int_{\mathbb{R}^*} \mathrm{tr}[\pi_\lambda(f * \overline{\varphi_\varepsilon})]|\lambda|^n\,d\lambda \\ &= c_n \int_{\mathbb{R}^*} \mathrm{tr}[\pi_\lambda(f)]|\lambda|^n\,d\lambda, \end{aligned} \tag{9.27}$$

o ile umiemy uzasadnić przejście graniczne.

Jeśli teraz $f_{g_0}(g) = f(gg_0)$, to stosując powyższy wzór dla f_{g_0} mamy

$$f(g_0) = f_{g_0}(0) = c_n \int_{\mathbb{R}^*} \mathrm{tr}[\pi_\lambda(f_{g_0})]|\lambda|^n\,d\lambda = c_n \int_{\mathbb{R}^*} \mathrm{tr}[\pi_\lambda(f)\pi(g_0)^*]|\lambda|^n\,d\lambda. \tag{9.28}$$

Nosi on nazwę wzoru na odwrócenie.

10. Baza funkcji Hermite'a na $L^2(\mathbb{R}^n)$

Na H_n zdefiniujmy lewostronnie niezmiennicze pola wektorowe

$$Z_j = \frac{1}{2}(X_j - iY_j), \quad \bar{Z}_j = \frac{1}{2}(X_j + iY_j), \quad j = 1, 2, ..., n.$$

Na $H_n = \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R} = \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$ wprowadzimy współrzędne zespolone $z_j = x_j + iy_j$ razem z zespolonymi pochodnymi

$$\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2}(\partial/\partial x_j - \frac{i}{4}\partial/\partial y_j), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2}(\partial/\partial x_j + \frac{i}{4}\partial/\partial y_j),$$

wówczas mamy

$$Z_j = \frac{\partial}{\partial z_j} - \frac{i}{4}\bar{z}_j\frac{\partial}{\partial t}, \quad \bar{Z}_j = \frac{\partial}{\partial z_j} + \frac{i}{4}z_j\frac{\partial}{\partial t}.$$

Stosując $d\pi_\lambda$ do tych pól mamy

$$d\pi_\lambda(Z_j) = \frac{1}{2}(P_j - i\lambda Q_j) = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial \xi_j} + \lambda\xi_j) = D_j^{(\lambda)},$$

$$d\pi_\lambda(\bar{Z}_j) = \frac{1}{2}(P_j + i\lambda Q_j) = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial \xi_j} - \lambda\xi_j) = \bar{D}_j^{(\lambda)},$$

Aby uprościć oznaczenia rozważmy najpierw $n = 1$ i $\lambda = 1$. Mamy operatory Z, $\bar{Z}$, D, $\bar{D}$.

Funkcja Gaussowaska

$$\varphi_0(\xi) = e^{-\xi^2/2}$$

jest jedynym (z dokładnością do wielokrotności) L^2-rozwiązaniem równania $D\varphi_0 = 0$.

10.29. **Twierdzenie.** *Funkcje $\varphi_n = \bar{D}^n\varphi_0$ tworzą bazę ortogonalną w $L^2(\mathbb{R})$. Ponadto*

$$\bar{D}\varphi_0 = \varphi_{n+1}, \quad D\varphi_n = -\frac{n}{2}\varphi_{n-1}.$$

D o w ó d. Pierwsza równość wynika z definicji. Przejdźmy do drugiej. Mamy $[D, \bar{D}] = -\frac{1}{2}I$ i $\bar{D} = -D^*$. Postępujemy indukcyjnie. Dla $n = 0$ jest to oczywiście prawdziwe. Dalej załóżmy prawdziwość wzoru dla n i mniejszych. Mamy

$$-\frac{1}{2}\varphi_n = [D, \bar{D}]\varphi_n = D\varphi_{n+1} - \bar{D}D\varphi_n = D\varphi_{n+1} + -\bar{D}(-\frac{n}{2}\varphi_{n-1}) = D\varphi_{n+1} + \frac{n}{2}\varphi_n.$$

Teraz zajmijmy się ortogonalnością. Dla $n > 0$ mamy:

$$\langle\varphi_0, \varphi_n\rangle = \langle\varphi_0, \bar{D}\varphi_{n-1}\rangle = -\langle D\varphi_0, \varphi_{n-1}\rangle = 0.$$

Jeśli $m, n > 0$, to

$$\langle\varphi_m, \varphi_n\rangle = \langle\varphi_m, \bar{D}\varphi_{n-1}\rangle = -\langle D\varphi_m, \varphi_{n-1}\rangle = \frac{m}{2}\langle\varphi_{m-1}, \varphi_{n-1}\rangle = 0$$

z indukcji.

Z powyższego wzoru indukcyjnie dostajemy:

$$\|\varphi_n\|_{L^2}^2 = \frac{n!}{2^n}\|\varphi_0\|_{L^2}^2 = \frac{n!}{2^n}\sqrt{\pi}.$$

Aby udowodnić zupełność systemu możemy zastosować inną definicję φ_n, mianowicie:

$$\varphi_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2}\Big(\frac{d}{dx}\Big)^k e^{-x^2}.$$

Sprawdzamy, że dla $n = 0$ dostajemy tę sama funkcję gaussowską i że spełnione jest to samo równanie kreacji. Wówczas rozwijając funkcję

$$t \mapsto e^{-(x^2/2-2tx+t^2)} = e^{x^2/2}e^{-(x-t)^2}$$

w zerze we szereg Taylora dostajemy wzór na funkcję tworzącą

$$\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(x)\frac{t^n}{n!} = e^{-(x^2/2-2tx+t^2)}.$$

Jeśli więc $f \perp \varphi_n$, to $f(x) \perp e^{-(x^2/2-2tx+t^2)}$ dla każdego $t \in \mathbb{R}$. Daje to

$$\int f(x)e^{-x^2/2}e^{2tx}\,dx = 0$$

dla każdego $t \in \mathbb{R}$. Ale powyższa całka jest funkcją całkowitą zmiennej $t \in \mathbb{C}$. Wstawiając $t = i\xi$ wnioskujemy $(f(x)e^{-x^2/2})\hat{}(\xi) = 0$, więc $f = 0$.

Funkcje φ_n nazywamy funkcjami Hermite'a, natomiast funkcje

$$h_n(\xi) = \frac{2^{n/2}}{\pi^{1/4}\sqrt{n!}}\varphi_n(\xi)$$

nazywamy znormalizowanymi funkcjami Hermite'a.

Dla $\lambda \neq 0$ kładziemy

$$h_n^{(\lambda)}(\xi) = |\lambda|^{1/4}h_n(\sqrt{|\lambda|}\xi).$$

Mamy dla $\lambda > 0$:

$$d\pi_\lambda(Z)h_n^{(\lambda)} = -\sqrt{n|\lambda|/2}h_{n-1}^{(\lambda)}, \quad d\pi_\lambda(\bar{Z})h_n^{(\lambda)} = \sqrt{(n+1)|\lambda|/2}h_{n+1}^{(\lambda)}.$$

Dla $\lambda < 0$ zachodzi:

$$d\pi_\lambda(Z)h_n^{(\lambda)} = \sqrt{(n+1)|\lambda|/2}h_{n+1}^{(\lambda)}, \quad d\pi_\lambda(\bar{Z})h_n^{(\lambda)} = -\sqrt{n|\lambda|/2}h_{n-1}^{(\lambda)}.$$

W przypadku wielkowymiarowym dla $m = (m_1, ..., m_n)$ kładziemy

$$h_m^{(\lambda)}(\xi_1, ..., \xi_n) = h_{m_1}^{(\lambda)}(\xi_1)...h_{m_n}^{(\lambda)}(\xi_n).$$

11. Podlaplasian na H_n

Podlaplasianem na H_n nazywamy operator różniczkowy lewostronnie niezmienniczy zadany wzorem

$$\mathcal{L} = \sum_{j=1}^{n} (X_j^2 + Y_j^2).$$

Dla reprezentacji unitarnej π grupy H_n operator

$$d\pi(\mathcal{L}) = \sum_{j=1}^{n} (d\pi(X_j)^2 + d\pi(Y_j)^2)$$

jest dobrze zdefiniowany na przestrzeni Gårdinga. W przypadku reprezentacji jednowymiarowej $\rho(x, y) = e^{i(\xi \cdot x + \eta \cdot y)}$, mamy

$$d\rho(\mathcal{L}) = -|\xi|^2 - |\eta|^2.$$

Dla reprezentacji π_λ, $\lambda \neq 0$, mamy

$$d\pi_\lambda(\mathcal{L}) = \Delta - \lambda^2 |\xi|^2.$$

Dla $n = 1$ i $\lambda = 1$ jest to klasyczny operator Hermite'a

$$\frac{d}{d\xi^2} - \xi^2.$$

Zauważmy, że

$$\mathcal{L} = 2 \sum_{n=1}^{n} Z_j \bar{Z}_j + \bar{Z}_j Z_j.$$

Zatem dla $m = (m_1, ...m_n)$ momentalnie dostajemy

$$d\pi_\lambda(\mathcal{L}) h_m^{(\lambda)} = -(2|m| + n)|\lambda| h_m^{(\lambda)}.$$

Z uwagi na to, że $h_m^{(\lambda)}$ tworzą bazę o.n., mamy rozkład spektralny operatora $d\pi_\lambda(\mathcal{L}) = \Delta - \lambda^2 |\xi|^2$.

Dalej, jeśli funkcja f na H_n jest "dobra", mamy

$$d\pi_\lambda(\mathcal{L}^k f) = d\pi_\lambda(f) d\pi_\lambda(\mathcal{L})^k.$$

Kolejnym celem, jaki można postawić, jest uzyskanie rozkładu spektralnego operatora $\mathcal{L}$.

Literatura

[1] G. Folland and E. Stein, *Harmonic Analysis in Phase Spaces,* Princeton University Press, Princeton, NJ, 1989.

[2] G. Folland and E. Stein, *Hardy Spaces on Homogeneous Groups,* Princeton University Press, Princeton, NJ, 1982.

[3] F. Ricci, *Harmonic analysis on the Heisneberg group,* unpuplished lecture notes, Cortona 1992.

[4] E. Stein, *Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993.