Analiza harmoniczna na grupach jednorodnych na przykładzie grupy Heisenberga

Informacje wstępne.

Grupa jednorodna to nilpotentna grupa Liego, którą jako rozmaitość można utożsamić z przestrzenią $\boldsymbol{R}^n$, w taki sposób że działania grupowe wyrażają się przez funkcje wielomianowe. Dodatkowo zakłada się istnienie grupy automorfizmów zwanych dylatacjami o własnościach podobnych do jednokładności $x \mapsto tx$ w $\boldsymbol{R}^n$. Jeśli w $\boldsymbol{R}^3$ wprowadzimy działanie

$$(x, y) \mapsto (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3 + \frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1),$$

otrzymamy najprostszą nieabelową strukturę grupy nilpotentnej, a po zdefiniowaniu dylatacji

$$\delta_t(x_1, x_2, x_3) = (tx_1, tx_2, t^2 x_3), \qquad t > 0,$$

grupę jednorodną zwaną grupą Heisenberga. Ten modelowy przykład grupy jednorodnej nie tylko pozwala zademonstrować szereg zjawisk charakterystycznych dla analizy harmonicznej na grupach jednorodnych, ale i sam w sobie jest ciekawym obiektem o wieloaspektowych związkach z szeroko rozumianą analizą w $\boldsymbol{R}^n$.

Analiza harmoniczna na grupach jednorodnych zajmuje się zagadnieniami podobnymi do tych, które są przedmiotem badań analizy w $\boldsymbol{R}^n$. Występuje tu cała gama przestrzeni funkcyjnych, takich jak przestrzenie L^p, przestrzenie Hardy'ego, Höldera, Sobolewa, i mnogość charakterystycznych operatorów liniowych i nieliniowych. Często są to operatory splotu, a więc przemienne z translacjami grupowymi lub też operatory jednorodne względem automorficznych dylatacji. Wiedza o tych klasach operatorów przydaje się do badania bardziej złożonych operacji, które nie są już ani niezmiennicze, ani jednorodne. Często celem jest opis własności pewnego nieograniczonego operatora różniczkowego ważnego z punktu widzenia teorii równań różniczkowych cząstkowych lub teorii funkcji holomorficznych wymagający wzięcia pod uwagę całych rodzin liniowych operatorów ograniczonych. Dlatego pytanie o ograniczoność, np. na przestrzeniach L^p, wielu pojawiających się operacji jest jednym z najważniejszych.

Jako że cała ta analiza odbywa się na grupie Liego, poświęcimy też trochę czasu na naszkicowanie podstaw teorii grup Liego i teorii reprezentacji unitarnych, ilustrując je przykładem grupy Heisenberga.

Wykład ma charkter mieszany. Obok fragmentów prowadzonych metodą szkolną z pełnym wyprowadzeniem i ścisłymi dowodami, bedą też podawane informacje dotyczące szerszego kontekstu omawianych zagadnień.

Plan wykładu

1. **Analiza harmoniczna w $\boldsymbol{R}^n$:** dystrybucje, transformata Fouriera, operatory splotu i mnożenia, funkcje maksymalne i zbieżność prawie wszędzie, całki osobliwe, teoria Calderóna-Zygmunda.
2. **Grupa Heisenberga jako grupa Liego:** potoki fazowe na rozmaitości, elementy teorii Liego, pola wektorowe, algebra Liego, wzór Cambella-Hausdorffa, grupa Heisenberga jako grupa macierzowa i jako grupa Hausdorffa, bazowe pola niezmiennicze na grupie.
3. **Grupa Heisenberga:** reprezentacje Schrödingera, splot skręcony, twierdzenie Stone'a-von Neumanna, pełny opis nieprzywiedlnych reprezentacji unitarnych, wzór Plancherela,
4. **Grupy nilpotentne:** grupy jednorodne, całki osobliwe, lemat Cotlara-Steina, rachunek symboliczny Melina, twierdzenia typu mnożnikowego.