Spis treści

Rozdział 1

Wstęp

W opisie zjawisk mechaniki kwantowej wielkości obserwowane w doświadczeniu reprezentowane są przez operatory samosprzężone określone na gęstym podzbiorze przestrzeni Hilberta $L^2(\mathbb{R})$. Ponadto wszystkie stany, w których może występować cząstka są reprezentowane przez funkcje falowe, które należą do klasy $L^2(\mathbb{R})$. Aby wyjaśnić zjawiska zachodzące w mikroświecie trzeba było rozszerzyć teorię Newtonowską. W tym celu konieczny był nowy formalizm matematyczny. Jeden z postulatów mechaniki kwantowej zakłada, że zachodzi pewna odpowiedniość pomiędzy tymi dwoma sposobami opisu zjawisk. Otóż relacje, które zachodzą między wielkościami fizycznymi w mechanice klasycznej zostają zachowane po zastąpieniu tych wielkości odpowiadającymi im operatorami. Jedna z ważniejszych relacji w mechanice klasycznej dotyczy związku pomiędzy pędem i położeniem cząstki i jest zadana wzorem

$$\{p, x\} = 1,$$

gdzie $\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x}\frac{g\partial x}{\partial p}$ nazywa się klasycznym nawiasem Poissona. Fakt, że nawias Poissona dwóch funkcji i komutator dwóch operatorów (komutatorem operatorów A i B nazywamy operator $[A, B] = AB - BA$) mają podobne własności skłonił Diraca do postawienia pewnej hipotezy. Zakłada ona, że każdej funkcji f w teorii klasycznej odpowiada operator $Q(f)$ w teorii kwantowej w taki sposób, że spośród wszystkich funkcji tej teorii istnieje jedna para funkcji p i x, dla której spełniony jest związek

$$[Q(p), Q(x)] = -i\hbar Q(\{p, x\}) = -i\hbar Q(1) = -i\hbar I.$$

Idea ta stała się inspiracją do zbudowania matematycznych podstaw mechaniki kwantowej. Naturalne bowiem stają się pytania o to, w jakim systemie uda się zapewnić tę równość, oraz czy możliwe jest istnienie więcej niż jednego matematycznego modelu, w którym powyższa równość jest spełniona. Przedstawimy teraz twierdzenie, które pokazuje, że odpowiedniego modelu nie możemy znaleźć w teorii operatorów ograniczonych.

Twierdzenie 1.1. *Niech $\mathcal{H}$ bedzie ośrodkową przestrzenią Hilberta. Wtedy nie istnieją operatory $A,\ B \in B(\mathcal{H})$, których komutator $[A, B] = AB - BA$ jest równy identyczności.*

Twierdzenie to po raz pierwszy zostało udowodnione przez A. Wintnera w 1947r.([9] twierdzenie 13.6).

Dowód. Przypomnijmy, że komutator ma następującą własność: $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$ dla $A, B, C \in B(\mathcal{H})$.

Załóżmy teraz nie wprost, że $A, B \in B(\mathcal{H})$ i $[A, B] = I$. Wtedy ciąg $a_n = [A^n, B]$ zadany jest wzorem $[A^n, B] = nA^{n-1}$. Rzeczywiście $a_1 = I = A^0$. Ponadto

$$\begin{aligned}[A^{n+1}, B] &= A[A^n, B] + [A, B]A^n \\ &= AnA^{n-1} + A^n = (n+1)A^n,\end{aligned}$$

co stanowi krok indukcyjny dowodu. Wobec definicji wyrazu a_n otrzymujemy nierówność

$$\begin{aligned}n\|A^{n-1}\| &\leqslant \|A^n B\| + \|BA^n\| \\ &\leqslant \|A^{n-1}\|\|AB\| + \|BA\|\|A^{n-1}\|.\end{aligned}$$

Dzieląc obustronnie przez $\|A^{n-1}\| \neq 0$ otrzymujemy, że

$$n \leqslant \|AB\| + \|BA\|.$$

Ponieważ założyliśmy, że operatory A, B są ograniczone, więc otrzymujemy sprzeczność. $\square$

Możemy wywnioskować stąd, że mechanika kwantowa nie może opierać się tylko na teorii operatorów ograniczonych. W niniejszej pracy prezentujemy rozważania, które prowadzą do Twierdzenia Stone'a-von Neumanna. Twierdzenie to daje odpowiedź na pytanie o istnienie innych matematycznych modeli mechaniki kwantowej.

W niniejszej pracy nigdzie nie korzystamy z twierdzenia spektralnego. Twierdzenie to pozwoliłoby na znaczne uproszczenie wielu rozumowań np. dowodu twierdzenia Stone'a, (patrz [3] rozdział IV §11.1) jak też problemów związanych z opisem dziedzin operatorów samosprzężonych. Wydaje się jednak, że takie bardziej elementarne podejście też ma swoją wartość.

W tym miejscu chciałabym bardzo serdecznie podziękować swojemu promotorowi profesorowi Pawłowi Głowackiemu za wielkie zaangażowanie, otwartość i danie możliwości napisania jakże ciekawej dla mnie pracy magisterskiej.

Rozdział 2

Operatory położenia i pędu

Niech $\mathcal{H}$ oznacza ośrodkową przestrzeń Hilberta, natomiast A będzie operatorem określonym na gęstej podprzestrzni $\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{H}$, co zapisujemy $A : \mathcal{D}(A) \to \mathcal{H}$. Jeśli $\mathcal{D}(A) = H$ i A jest operatorem ograniczonym i ciągłym to piszemy, że $A \in B(\mathcal{H})$.

2.1 Operator położenia

Definicja 2.1. Niech $A : \mathcal{D}(A) \to \mathcal{H}$. Dziedziną operatora sprzężonego A^* nazywamy zbiór

$$\mathcal{D}^*(A) = \{y \in \mathcal{H} : \; x \to \langle Ax, y\rangle \text{ jest ciągłe}\}.$$

Definicja 2.2. Operatorem sprzężonym do $A : \mathcal{D}(A) \to \mathcal{H}$ nazywamy jedyny operator A^*, taki że dla każdych $\psi \in \mathcal{D}^*(A), \; \varphi \in \mathcal{D}(A)$

$$\langle A\varphi, \psi\rangle = \langle \varphi, A^*\psi\rangle \, .$$

Definicja 2.3. Operator A na przestrzeni $\mathcal{H}$ nazywamy samosprzężonym, jeżeli $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A^*)$ oraz $A = A^*$. To znaczy, że dla każdych $\psi, \; \varphi \in \mathcal{D}(A) = \mathcal{D}^*(A)$ zachodzi równość

$$\langle \varphi, A\psi\rangle = \langle A\varphi, \psi\rangle \, .$$

Definicja 2.4. Operator A o gęstej dziedzinie $\mathcal{D}(A)$ nazywamy symetrycznym, jeśli

$$\langle A\varphi, \psi\rangle = \langle \varphi, A\psi\rangle$$

dla $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(A)$.

Uwaga 2.5. Oczywiście jeśli A jest symetryczny, to $\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(A^*)$. Ponadto dla operatorów ograniczonych definija operatora symetrycznego jest równoważna definicji opratora symetrycznego.

Definicja 2.6. Operatorem położenia w przestrzeni Hilberta $L^2(\mathbb{R})$ nazywamy operator Q dany wzorem

$$Qf = xf.$$

Dziedziną tego operatora jest zbiór $\mathcal{D}(Q) = \{f \in L^2 : \; xf \in L^2\}$.

Twierdzenie 2.7. *Operator położenia jest samosprzężony.*

W dowodzie tego twierdzenia skorzystamy z następujacego lematu.

Lemat 2.8. *Niech $g \neq 0$ będzie funkcją mierzalną taką, że $\int_{-n}^{n} |g(x)|^2 dx < \infty$ dla każdego n. Jeśli ponadto istnieje stała $C > 0$, taka że dla każdego $f \in L^2(\mathbb{R})$*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)||f(x)|dx \leqslant C\|f\|_2,$$

to $g \in L^2(\mathbb{R})$.

Dowód. Jeżeli nasza nierówność zachodzi dla każdego $f \in L^2(\mathbb{R})$, to w szczególności możemy przyjąć $f = \chi_n g$, gdzie χ_n oznacza funkcję charakterystyczną przedziału $[-n, n]$. Oczywiście $f \in L^2(\mathbb{R})$. Mamy zatem

$$0 < \int_{-n}^{n} |g(x)|^2 dx \leqslant C \left(\int_{-n}^{n} |g(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

dla dostatecznie dużych n. Dzieląc obie strony nierówności przez $(\int_{-n}^{n} |g(x)|^2 dx)^{\frac{1}{2}} \neq 0$ i przechodząc z n do nieskończoności dostajemy tezę. □

Udowodnimy teraz Twierdzenie 2.7.

Dowód. Wykażemy, że zachodzą równości $\mathcal{D}(Q) = \mathcal{D}(Q^*)$ i $Q = Q^*$. Aby sprawdzić $\mathcal{D}(Q) = \mathcal{D}(Q^*)$ pokażemy dwie inkluzje.
($\subseteq$) Łatwo widać, że Q jest symetryczny, więc $\mathcal{D}(Q) \subseteq \mathcal{D}(Q^*)$.
($\supseteq$) Niech $h \in \mathcal{D}(Q^*)$. Wtedy istnieje stała C_h taka, że $| \langle Qf, h \rangle | \leqslant C_h \cdot \|f\|_2$. Dalszą część uzyskujemy podstawiając w lemacie $g := xh$.

Ponadto $\mathcal{D}(Q)$ jest gęstym podzbiorem $L^2(\mathbb{R})$. Wynika to natychmiast z obserwacji, że $\mathcal{D}(Q)$ zawiera zbiór złożony z funkcji charakterystycznych odcinków domkniętych w $\mathbb{R}$, który jest liniowo gęsty w $L^2(\mathbb{R})$.

Ostatecznie pokażemy, że $Q = Q^*$ dla każdego $\psi,\ \varphi \in \mathcal{D}(Q) = \mathcal{D}^*(Q)$:

$$\langle Q\varphi, \psi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi\overline{\psi}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\overline{x\psi}\, dt = \langle \varphi, Q\psi \rangle .$$

□

2.2 Operator pędu

Definicja 2.9. Transformatą Fouriera funkcji $f \in L^2(\mathbb{R})$ w punkcie ξ nazywamy wyrażenie

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2\pi i x\xi} dx.$$

Definicja 2.10. Operatorem pędu w przestrzeni Hilberta $L^2(\mathbb{R})$ nazywamy operator P dany wzorem

$$Pf = -i\frac{d}{dx}f.$$

Dziedzinę tego operatora definiujemy w następujący sposób:

$$f \in \mathcal{D}(P) \iff \widehat{f} \in \mathcal{D}(Q) \iff \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi < \infty.$$

Definicja 2.11. Jeżeli $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}(A)$ i dla każdego $x \in \mathcal{D}(A)$ istnieje $x_n \in \mathcal{D}$, taki że

$$x_n \to x, \quad Ax_n \to Ax,$$

to mówimy, że $\mathcal{D}$ jest rdzeniem (istotną dziedziną) operatora A.

Definicja 2.12. Klasą Schwartza na $\mathbb{R}$ nazywamy zbiór funkcji $f\, inC^\infty(\mathbb{R})$ takich, że dla każdych liczb całkowitych n, m istnieje stała M, że

$$|x^n f^{(m)}(x)| \leqslant M.$$

Klasę Schwartza będziemy oznaczać przez $\mathcal{S}$.

Twierdzenie 2.13. *Klasa Schwartza na $\mathbb{R}$ jest rdzeniem operatora pędu.*

W dowodzie tego twierdzenia będziemy korzystać z równości Plancherela (patrz np. [1])

$$\|f\|_{L^2} = \|\widehat{f}\|_{L^2}, \ \ f \in L^2(\mathbb{R}).$$

Dowód. Niech $f \in L^2(\mathbb{R})$, $\quad \varphi_n(x) = ne^{-\pi(xn)^2}$,

$$\psi_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } |x| \leqslant n \\ 0, & \text{gdy } |x| \geqslant 2n, \end{cases} \qquad \psi_n \in C^\infty, \quad 0 \leqslant \psi_n \leqslant 1.$$

Funkcje $\psi_n \cdot (\varphi_n * f)$ należą do $\mathcal{S}$. Pokażemy, że

$$\psi_n \cdot (\varphi_n * f) \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} f \quad \text{i} \quad P(\psi_n \cdot (\varphi_n * f)) \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} Pf.$$

W tym celu wykażemy kolejno, że

1. $\psi_n f \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} f$,
2. $\varphi_n * f \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} f$,
3. $\psi_n \cdot (\varphi_n * f) \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} f$,
4. $P(\psi_n \cdot (\varphi_n * f)) \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} Pf$.

Ad. 1. Ponieważ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$, $\quad 0 \leqslant \psi_n f(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x)$ i dla każdego $n \quad |\psi_n f(x)| \leqslant |f|$, więc na mocy twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności ograniczonej

$$\begin{aligned} \|\psi_n(f) - f\|_{L^2}^2 &= \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_n f(x) - f(x)|^2 \, dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \lim_{n\to\infty} (\psi_n f(x) - f(x)) \right|^2 dx = 0. \end{aligned}$$

Ad. 2. Korzystając z równości Plancherela otrzymujemy, że

$$\begin{aligned} \|\varphi_n * f - f\|_{L^2}^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_n * f(x) - f(x)|^2 \, dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \widehat{\varphi}_n(\xi)\widehat{f}(\xi) - \widehat{f}(\xi) \right|^2 d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{\varphi}_n(\xi) - 1|^2 \left| \widehat{f}(\xi) \right|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Ponieważ $\widehat{\varphi}_n(\xi) = e^{-\pi(n^{-1}\xi)^2}$ i $|\widehat{\varphi}_n(\xi) - 1|^2 \left|\widehat{f}(\xi)\right|^2 \leqslant \left|\widehat{f}(\xi)\right|^2$, więc na mocy twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności ograniczonej otrzymujemy, że

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{\varphi}_n(\xi) - 1|^2 \left|\widehat{f}(\xi)\right|^2 d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\lim_{n\to\infty} \widehat{\varphi}_n(\xi) - 1\right|^2 \left|\widehat{f}(\xi)\right|^2 d\xi = 0.$$

Ad. 3. Z 1) i 2) otrzymujemy, że

$$\begin{aligned} \|\psi_n \cdot (\varphi_n * f) - f\|_{L^2} &\leqslant \|\psi_n f - f\|_{L^2} + \|\psi_n(\varphi_n * f - f)\|_{L^2} \\ &= \|\psi_n f - f\|_{L^2} + \|\varphi_n * f - f\|_{L^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \end{aligned}$$

Ad. 4. Rzeczywiście,

$$\|P(\psi_n \cdot (\varphi_n * f)) - Pf\|_{L^2}^2 = |-i| \|\frac{d}{dx}\psi_n \cdot (\varphi_n * f) - \frac{d}{dx} f\|_{L^2}^2.$$

Korzystając z równości Plancharela i wzorów

$$\widehat{\frac{d}{d\xi} f(\xi)} = 2\pi i \xi \widehat{f}(\xi), \quad \frac{d}{dx}(\varphi_n * f)(x) = (\frac{d}{dx}\varphi_n * f)(x)$$

otrzymujemy, że

$$\begin{aligned} \left\|\frac{d}{dx}\psi_n \cdot (\varphi_n * f) - \frac{d}{dx} f\right\|_{L^2}^2 &= 2\pi \int_{\infty}^{\infty} \left|\xi e^{-\pi(n^{-1}\xi)^2} \widehat{f}(\xi) - \xi \widehat{f}(\xi)\right|^2 d\xi \\ &= 2\pi \int_{\infty}^{\infty} (e^{-\pi(n^{-1}\xi)^2} - 1)^2 \left|\xi \widehat{f}(\xi)\right|^2 d\xi, \end{aligned}$$

co na mocy twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności ograniczonej zbiega do zera przy n dążącym do nieskończoności.

□

W celu wykazania, że klasa Schwartza na $\mathbb{R}$ jest rdzeniem dla operatora położenia pokażemy, że pomiędzy operatorami położenia i pędu zachodzą pewne relacje. Będzie to tematem kolejnego podrozdziału.

2.3 Relacje pomiędzy operatorami położenia i pędu i ich konsekwencje

Lemat 2.14. *Pomiędzy operatorami położenia i pędu zachodzi związek*

$$\widehat{Pf} = 2\pi Q \widehat{f}, \quad f \in \mathcal{D}(P) \Longleftrightarrow \widehat{f} \in \mathcal{D}(Q).$$

Dowód. Rzeczywiście,

$$\begin{aligned} -i\widehat{\frac{d}{d\xi} f(\xi)} &= -i \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i x \xi} \frac{d}{dx} f(x) dx \\ &= -i f(x) e^{-2\pi i x \xi}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \xi e^{-2\pi i x \xi} f(x) dx \\ &= 2\pi \xi \widehat{f}(\xi). \end{aligned}$$

□

Twierdzenie 2.15. *Klasa Schwartza na $\mathbb{R}$ jest rdzeniem operatora położenia.*

Dowód. Niech $g_n := (\psi_n(\varphi_n * f))^{\widehat{}}(x)$. Ponieważ transformata Fouriera przeprowadza klasę Schwartza na klasę Schwartza wzajemnie jednoznacznie i funkcje $\widehat{g}_n \in \mathcal{S}$. Oczywiście $\widehat{g}_n \xrightarrow{n\to\infty} \widehat{f}$. Korzystając teraz z Lematu 2.14 i z Twierdzenia 2.13 otrzymujemy, że

$$Q\widehat{g}_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} Q\widehat{f}, \quad \widehat{f} \in \mathcal{D}(Q)$$

co pokazuje, że klasa Schwartza jest rdzeniem operatora położenia. □

Definicja 2.16. Operator $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ liniowy i ciagły nazywamy unitarnym wtedy i tylko wtedy, gdy

$$UU^* = U^*U = I.$$

Uwaga 2.17. Operator liniowy $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ jest unitarny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle, \quad x, y \in \mathcal{H}.$$

Z twierdzenia Plancherela wynika natychmiast, że transformata Fouriera jest operatorem unitarnym.

Twierdzenie 2.18. *Jeżeli A jest operatorem samosprzężonym, a U operatorem unitarnym, to $U^{-1}AU$ jest operatorem samosprzężonym.*

Dowód. Przyjmijmy $\mathcal{D}(U^{-1}AU) = U^{-1}(\mathcal{D}(A))$. Operator $U^{-1}AU$ jest symetryczny, bo

$$\begin{aligned}\langle U^{-1}AU(U^{-1}x), U^{-1}y\rangle &= \langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle \\ &= \langle U^{-1}x, U^{-1}AU(U^{-1}y)\rangle\end{aligned}$$

dla $x,\ y \in \mathcal{D}(A)$. Zatem $\mathcal{D}(U^{-1}AU) \subseteq \mathcal{D}((U^{-1}AU)^*)$. Niech $z \in \mathcal{D}((U^{-1}AU)^*)$. Wtedy

$$\langle Ax, Uz\rangle = \langle U^{-1}AU(U^{-1}x), z\rangle.$$

Ponadto odwzorowanie $x \mapsto \langle Ax, Uz\rangle$ jest ciągłym funkcjonałem na $x \in \mathcal{D}(A)$. Zatem $Uz \in \mathcal{D}(A^*) = \mathcal{D}(A)$, więc $z \in \mathcal{D}(U^{-1}AU)$. □

Twierdzenie 2.19. *Operator pędu jest samosprzężony.*

Dowód. Ponieważ Q jest operatorem samosprzężonym, więc także $2\pi Q$ jest operatorem samosprzężonym. Z Lematu 2.14 natomiast wynika że $P = \mathcal{F}^{-1}2\pi Q\mathcal{F}$. Z unitarności transformaty Fouriera i z Twierdzenia 2.18 otrzymujemy tezę, że P jest operatorem samosprzężonym. □

Definicja 2.20. Niech A będzie operatorem określonym na przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$. Spektrum operatora A definujemy jako

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A \text{ nie jest odwracalny}\}.$$

Lemat 2.21. *Niech $A : \mathcal{D}(A) \to \mathcal{H}$, gdzie $\mathcal{D}(A)$ będzie gęstą podprzestrzenią $\mathcal{H}$, wtedy A^* jest operatorem domkniętym. Operator A jest domknięty, gdy ma domknięty wykres.*

Dowód. W celu wykazania domkniętości wykresu A^* wystarczy pokazać, że jeśli dla każdego ciągu $(x_n) \subseteq \mathcal{D}(A^*)$

$$x_n \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad i \quad A^*x_n \xrightarrow{n\to\infty} y, \quad \text{to} \quad y = 0.$$

Dla każdego $z \in \mathcal{D}(A)$ mamy

$$\langle y, z\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle A^*x_n, z\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle x_n, Az\rangle = 0,$$

co implikuje, że $y = 0$. □

Twierdzenie 2.22. *Spektrum operatora samosprzężonego jest rzeczywiste.*

Dowód. Niech A będzie operatorem samosprzężonym o gęstej dziedzinie w $\mathcal{H}$. Wykażemy, że dla $\lambda = a + bi$, gdzie $b \neq 0$ operator $\lambda I - A$ jest odwracalny. Zauważmy, że

$$\langle(\lambda I - A)x, x\rangle = \lambda\langle x, x\rangle - \langle Ax, x\rangle = a\|x\|^2 - \langle Ax, x\rangle + ib\|x\|^2, \quad x \in \mathcal{D}(A).$$

Stąd otrzymujemy

$$|\langle(\lambda I - A)x, x\rangle| \geqslant |b| \cdot \|x\|^2, \tag{2.23}$$

a w konsekwencji $(\lambda I - A)x = 0$ pociąga $x = 0$, co oznacza, że $\lambda I - A$ jest różnowartościowy. Zauważmy następnie, że $(\lambda I - A)(\mathcal{H})$ jest gęstym podzbiorem $\mathcal{H}$.Rzeczywiście dla $x \in \mathcal{D}(A)$ mamy, że dla każdego $y \in \mathcal{H}$

$$\langle(\lambda I - A)x, y\rangle = 0 \quad \text{implikuje, że} \quad \langle x, (\bar{\lambda} I - A)y\rangle = 0$$

dla $y \in \mathcal{D}(\bar{\lambda} I - A)$. Z powyższego wnioskujemy, że jeśli $(\bar{\lambda} I - A)y = 0$, to $y = 0$. Aby zakończyć dowód zauważmy, że $\lambda I - A = (\bar{\lambda} I - A)^*$ a więc operator $\lambda I - A$ jest domknięty na mocy Lematu 2.21. Stąd wynika, że $(\bar{\lambda} I - A)(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$. Mianowicie, niech $y_n = (\lambda I - A)x_n \to y$. Z nierówności 2.23 wynika, że (x_n) jest ciągiem Cauchy'ego, więc $x_n \to x \in \mathcal{H}$. Ponieważ jednocześnie $(\lambda I - A)x_n \to y$ i operator $\lambda I - A$ jest domknięty, więc $x \in \mathcal{D}(A)$ i $y = (\lambda I - A)x$. □

Wniosek 2.24. $\sigma(P) = \sigma(Q) = \mathbb{R}$.

Dowód. Ponieważ operatory położenia i pędu są samosprzężone, więc na mocy Twierdzenia 2.22 otrzymujemy, że $\sigma(P) \subseteq \mathbb{R}$ i $\sigma(Q) \subseteq \mathbb{R}$. W celu wykazania inkluzji $\mathbb{R} \subseteq \sigma(P)$ i $\mathbb{R} \subseteq \sigma(Q)$ załóżmy, że $\lambda \in \mathbb{R}$. Pokażemy, że operator $\lambda I - Q$ nie jest odwracalny. W tym celu zauważmy, że

$$\begin{aligned}\|(\lambda I - Q)\chi_{[\lambda-\frac{1}{n},\lambda-\frac{1}{n}]}\|^2_{L^2} &= \|(\lambda - x)\chi_{[\lambda-\frac{1}{n},\lambda-\frac{1}{n}]}\|^2_{L^2} \\ &\leqslant \frac{1}{n^2}\|\chi_{[\lambda-\frac{1}{n},\lambda-\frac{1}{n}]}\|^2_{L^2}.\end{aligned}$$

Stąd otrzymujemy, że

$$\|(\lambda - x)\chi_{[\lambda-\frac{1}{n},\lambda-\frac{1}{n}]}\|_{L^2} \leqslant \frac{1}{n}\|\chi_{[\lambda-\frac{1}{n},\lambda-\frac{1}{n}]}\|_{L^2}.$$

Ponieważ funkcje $\chi_{[\lambda-\frac{1}{n},\lambda-\frac{1}{n}]}$ należą do $L^2(\mathbb{R})$, więc $\lambda I - Q$ nie jest odwracalny, co pokazuje, że $\lambda \in \sigma(Q)$. W celu wykazania, że dla $\lambda \in \mathbb{R}$ operator $\lambda I - P$ nie jest odwracalny wystarczy przypomnieć, że $P = \mathcal{F}^{-1}2\pi Q\mathcal{F}$, gdzie $\mathcal{F}$ jest transformatą Fouriera. Wynika stąd, że operator $\lambda I - P$ jest odwracalny wtedy i tylko wtedy, gdy $\lambda I - Q$ jest odwracalny, a więc $\mathbb{R} \subseteq \sigma(P)$. □

Twierdzenie 2.25. *Dla operatorów położenia i pędu, określonych na przestrzeni Hilberta $L^2(\mathbb{R})$ i $f \in \mathcal{S}$, zachodzi następująca równość*

$$PQf - QPf = -iIf, \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Dowód. Rzeczywiście,

$$PQf(x) = -i\frac{d}{dx}xf(x) = -if(x) - ix\frac{d}{dx}f(x) = -if(x) + QPf(x).$$

□

Operatory położenia i pędu są operatorami nieograniczonymi. Aby badać ich własności potrzebna jest konstrukcja grupy operatorów unitarnych. W następnym rozdziale dokładniej omówimy tę grupę.

Rozdział 3

Grupa jednoparametrowa operatorów unitarnych

Celem tego rozdziału jest zdefiniowanie grupy operatorów unitarnych $U_t = e^{iAt}$ dla ograniczonego operatora A na przestrzeni Hilberta i udowodnienie kilku jej własności.

3.1 Definicja i własności operatora e^A

Definicja 3.1. Niech $A \in B(\mathcal{H})$. Operator e^A definiujemy w następujący sposób:

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

Szereg po prawej stronie jest dobrze określony, ponieważ jest bezwzględnie zbieżny.

Lemat 3.2. *Operator e^A posiada następujące własności:*

1. $||e^A|| \leqslant e^{||A||}$,
2. *Jeśli $A, B \in B(\mathcal{H})$ i A, B komutują, to $[A, e^B] = Ae^B - e^B A = 0$.*
3. *Jeśli $A, B \in B(\mathcal{H})$ i A, B komutują, to $e^{A+B} = e^A e^B$,*

Dowód.

1. Rzeczywiście,

$$\begin{aligned} ||e^A|| &= \left\| \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{A^k}{k!} \right\| = \lim_{N\to\infty} \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \right\| \\ &\leqslant \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{A^k}{k!} \right\| = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{||A||^k}{k!} = e^{||A||}. \end{aligned}$$

2. Skoro operatory A i B komutują, więc $[A, \sum_{k=0}^{N} \frac{B^k}{k!}] = 0$. Przechodząc z N do nieskończoności otrzymujemy, że $[A, e^B] = 0$.

3. Przypomnijmy, że

$$(A+B)^k = \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} A^n B^{k-n}$$

Ponieważ szeregi $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$, $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!}$ są bezwzględnie zbieżne, więc możemy zastosować twierdzenie o iloczynie Cauchy'ego szeregów. Mamy więc

$$\begin{aligned} e^A e^B &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{k} \frac{A^{k-n}}{(k-n)!} \frac{B^n}{n!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} A^{k-n} B^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A+B)^k}{k!} = e^{A+B}. \end{aligned}$$

□

3.2 Definicja i własności grupy jednoparametrowej operatorów unitarnych

Definicja 3.3. Niech $A \in B(\mathcal{H})$ i $A = A^*$. Wtedy,

$$U_t = e^{iAt} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(itA)^k}{k!}$$

nazywamy grupą jednoparametrową operatorów unitarnych.

Lemat 3.4. *Grupa jednoparametrowa operatorów unitarnych posiada następujące własności:*

1. $U_0 = I$,
2. U_t *jest unitarny dla każdego* $t \in \mathbb{R}$,
3. $\lim_{t\to 0} U_t = I$,
4. $U_{t+s} = U_t U_s$ *gdzie* $t, s \in \mathbb{R}$,
5. $\frac{d}{dt} e^{itA}\big|_{t=0} = iA$.

Dowód.

1. Oczywiście, $U_0 = e^{i0A} = I$.
2. Pokażemy, że $U_t U_t^* = U_t^* U_t = I$. Zauważmy, że

$$\begin{aligned} U_t^* = (e^{iAt})^* &= \left(\lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{(iAt)^k}{k!} \right)^* = \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{(iAt)^k}{k!} \right)^* \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{(iAt)^k}{k!} \right)^* = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{((iAt)^k)^*}{k!} \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{((iAt)^*)^k}{k!} = e^{(itA)^*} = e^{-itA} = U_{-t}. \end{aligned}$$

Stąd

$$U_t^* U_t = U_t U_t^* = U_t U_{-t} = e^{itA} e^{-itA} = I.$$

3. Oczywiście, dla $|t| \leqslant 1$

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\left\|e^{itA}-I\right\| &= \lim_{t\to 0}\left\|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(itA)^k}{k!}\right\| \\ &\leqslant \lim_{t\to 0}|t|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|t|^{k-1}\|A\|^k}{k!} \leqslant \lim_{t\to 0}|t|(e^{||A||}-1)=0.\end{aligned}$$

4. Ponieważ $i(s+t)A = isA + itA$, więc operatory isA oraz itA komutują. Ponadto są ograniczone, więc na mocy Lematu 3.2 (punkt 3)

$$U_{t+s} = e^{i(t+s)A} = e^{itA}e^{isA} = U_tU_s.$$

5. Oczywiście,

$$\frac{d}{dt}e^{itA}\Big|_{t=0} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{ihA}-I}{h}.$$

Wystarczy pokazać, że $\lim_{h\to 0}\left\|\frac{e^{ihA}-I}{h}-iA\right\|=0$. Rzeczywiście,

$$\begin{aligned}\left\|\frac{e^{ihA}-I}{h}-iA\right\| &\leqslant \left\|\frac{e^{ihA}-I}{h}-iA\right\| \\ &= \left\|\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(iA)^k h^{k-1}}{k!}\right\| \\ &\leqslant \sum_{k=2}^{\infty}\frac{\|A\|^k|h|^{k-1}}{k!},\end{aligned}$$

co przy h dążącym do zera zbiega do zera.

$\square$

Rozdział 4

Grupa jednoparametrowa operatora samosprzężonego

Celem tego rozdziału jest zdefiniowanie grupy jednoparametrowej e^{iAt} operatora samosprzężonego $A : \mathcal{D}(A) \to \mathcal{H}$ określonego na gęstej podprzestrzeni $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{H}$. Będziemy stosować oznaczenie $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \backslash \{0\}$.

4.1 Przygotowanie do dowodu twierdzenia Stone'a

Definicja 4.1. Niech $B = iA$. Dla $n \in \mathbb{Z}^*$ definiujemy

$$\mathcal{J}_n = (I - n^{-1}B)^{-1}.$$

Jest to poprawna definicja, ponieważ $\sigma(B) \subseteq i\mathbb{R}$.

Lemat 4.2. *Dla każdego $n \in \mathbb{Z}^*$ operator $\mathcal{J}_n$ posiada następujące własności:*

1. $\mathcal{J}_n^* = \mathcal{J}_{-n}$,
2. $\|\mathcal{J}_n\| \leqslant 1$,
3. $\mathcal{J}_n B = B\mathcal{J}_n = n(\mathcal{J}_n - I)$ *i operator* $B\mathcal{J}_n$ *jest ograniczony,*
4. $\lim_{|n|\to\infty} \mathcal{J}_n x = x$, $x \in \mathcal{H}$.

Dowód.

1. Rzeczywiście, $\mathcal{J}_n^* = ((I - n^{-1}B)^{-1})^* = (I - n^{-1}B^*)^{-1} = (I + n^{-1}B)^{-1} = \mathcal{J}_{-n}$.
2. Mamy $\left\langle (I - n^{-1}B)x, x \right\rangle = \|x\|^2 - n^{-1} \langle Bx, x \rangle$. Ponieważ

   $$\|x\|^2 = \operatorname{Re} \left\langle (I - n^{-1}B)x, x \right\rangle \quad \text{a} \quad n^{-1} \langle Bx, x \rangle = \operatorname{Im} \left\langle (I - n^{-1}B)x, x \right\rangle,$$

   więc $| \left\langle (I - n^{-1}B)x, x \right\rangle | \geqslant \|x\|^2$. Korzystając z nierówności Schwarza

   $$| \left\langle (I - n^{-1}B)x, x \right\rangle | \leqslant \|(I - n^{-1}B)x\| \|x\|$$

   dostajemy, że $\|(I - n^{-1}B)x\| \|x\| \geqslant \|x\|^2$. Dzieląc tę nierówność przez $\|x\|$ dostajemy $\|(I - n^{-1}B)x\| \|x\| \geqslant \|x\|$. Podstawiając $(I - n^{-1}B)x = y$ otrzymujemy, że $\|y\| \geqslant \|\mathcal{J}_n\| \|y\|$ dla każdego $y \in \mathcal{H}$. Stąd $\|\mathcal{J}_n\| \leqslant 1$.

3. Zauważmy, że $B : \mathcal{D}(B) \to \mathcal{H}$ jest surjekcją, natomiast $I - n^{-1}B : \mathcal{D}(B) \to \mathcal{H}$ jest bijekcją. Stąd $\mathcal{J}_n : \mathcal{H} \to \mathcal{D}(B)$ jako odwzorowanie odwrotne do $I - n^{-1}B$ jest również bijekcją. Ponieważ
$$\mathcal{J}_n(I - n^{-1}B) = (I - n^{-1}B)\mathcal{J}_n = I_{\mathcal{D}(B)},$$
więc przekształcając powyższe równanie otrzymujemy, że
$$\mathcal{J}_n B = B\mathcal{J}_n.$$
Przejdźmy teraz do pokazania równości z tezy:
$$\begin{aligned} B\mathcal{J}_n &= B(I - n^{-1}B)^{-1} \\ &= nn^{-1}B(I - n^{-1}B)^{-1} - n(I - n^{-1}B)^{-1} + n(I - n^{-1}B)^{-1} \\ &= (I - n^{-1}B)^{-1}n(n^{-1}B - I) + (I - n^{-1}B)^{-1}n \\ &= n(\mathcal{J}_n - I), \end{aligned}$$
co pokazuje ,że operator $B\mathcal{J}_n$ jest ograniczony dla każdego $n \in \mathbb{Z}^*$.

4. Wystarczy pokazać, że dla każdego $x \in \mathcal{D}(\mathcal{J}_n)$ $\lim_{|n|\to\infty} \|\mathcal{J}_n x - x\| = 0$. Mamy,
$$\begin{aligned} \|\mathcal{J}_n x - x\| &= \|(I - n^{-1}B)^{-1}x - x\| \\ &= \|(I - n^{-1}B)^{-1}(I - (I - n^{-1}B))x\| = n^{-1}\|\mathcal{J}_n Bx\|. \end{aligned}$$
Ponieważ operator $\mathcal{J}_n B$ jest ograniczony, więc wyrażenie $n^{-1}\|\mathcal{J}_n Bx\|$ zbiega do zera przy n dążącym do nieskończoności.

□

Definicja 4.3. Dla ustalonego $n \in \mathbb{Z}^*$ i $t \in \mathbb{R}$ definiujemy
$$T_t^{(n)} = e^{tB\mathcal{J}_n}, \text{ gdzie } t \cdot n \geqslant 0.$$

Lemat 4.4. *Dla każdych $m, n \in \mathbb{Z}^*$ i dla każdych $t \in \mathbb{R},\ x \in \mathcal{H}$ operator $T_t^{(n)}$ posiada następujące własności:*

1. $\mathcal{J}_n T_t^{(m)} = T_t^{(m)} \mathcal{J}_n$,
2. $\|T_t^{(n)}\| \leqslant 1$,
3. $\frac{d}{dt} T_t^{(n)} x = B\mathcal{J}_n T_t^{(n)} x,\ x \in \mathcal{H}$.

Dowód.

1. Zauważmy, że
$$T_t^{(m)} = e^{tB\mathcal{J}_m} = e^{tm(\mathcal{J}_m - I)} = e^{-mt}e^{mt\mathcal{J}_m}.$$
Możemy więc równość $\mathcal{J}_n T_t^{(m)} = T_t^{(m)} \mathcal{J}_n$ zapisać w postaci
$$\mathcal{J}_n e^{-mt}e^{mt\mathcal{J}_m} = e^{-mt}e^{mt\mathcal{J}_m}\mathcal{J}_n.$$
Dzieląc obustronnie przez e^{-mt} otrzymujemy $\mathcal{J}_n e^{mt\mathcal{J}_m} = e^{mt\mathcal{J}_m}\mathcal{J}_n$. Operator $\mathcal{J}_n$ jest ograniczony zatem na mocy Lematu 2.2 wystarczy pokazać, że
$$\mathcal{J}_n\mathcal{J}_m x = \mathcal{J}_m\mathcal{J}_n x \text{ dla każdego } x \in \mathcal{H}.$$

Równość $\mathcal{J}_n\mathcal{J}_m x = \mathcal{J}_m\mathcal{J}_n x$ jest równoważna równości $\mathcal{J}_m x = \mathcal{J}_n^{-1}\mathcal{J}_m\mathcal{J}_n x$. Rzeczywiście,

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_n^{-1}\mathcal{J}_m\mathcal{J}_n x &= (I - n^{-1}B)\mathcal{J}_m\mathcal{J}_n x \\ &= (\mathcal{J}_m - n^{-1}B\mathcal{J}_m)\mathcal{J}_n x = (\mathcal{J}_m - n^{-1}\mathcal{J}_m B)\mathcal{J}_n x \\ &= \mathcal{J}_m(I - n^{-1}B)\mathcal{J}_n = \mathcal{J}_m\mathcal{J}_n^{-1}\mathcal{J}_n x = \mathcal{J}_m x.\end{aligned}$$

2. Oczywiście,

$$\begin{aligned}\|T_t^{(n)}\| &= \|e^{tB\mathcal{J}_n}\| = \|e^{-nt}e^{nt\mathcal{J}_n}\| \\ &= e^{-nt}\|e^{nt\mathcal{J}_n}\| \leqslant e^{-nt}e^{nt\|\mathcal{J}_n\|} \leqslant 1.\end{aligned}$$

3. Niech $x \in \mathcal{D}(B)$. Na mocy Lematu 3.4

$$\frac{d}{dt}T_t^{(n)}x = e^{tB\mathcal{J}_n}B\mathcal{J}_n x.$$

Ponieważ $B\mathcal{J}_n = \mathcal{J}_n B$, więc korzystając z Lematu 2.2

$$e^{tB\mathcal{J}_n}B\mathcal{J}_n x = B\mathcal{J}_n e^{tB\mathcal{J}_n}x = B\mathcal{J}_n T_t^{(n)}x.$$

□

4.2 Twierdzenie Stone'a o istnieniu grupy jednoparametrowej operatora samosprzężonego

Twierdzenie 4.5 (Stone'a)**.** *Dla każdego $x \in \mathcal{D}(A)$ istnieje granica*

$$T_t x = \lim_{|n|\to\infty} T_t^{(n)}x,$$

przy czym zbieżność jest niemal jednostajna ze względu na $t \in \mathbb{R}$.

Dowód. Wykażemy, że ciąg $T_t^{(n)}x$ jest fundamentalny. Rzeczywiście,

$$\begin{aligned}\left\langle T_t^{(n)}x - T_t^{(m)}x, y\right\rangle &= \int_0^t \frac{d}{ds}\left\langle T_{t-s}^{(m)}T_s^{(n)}x, y\right\rangle ds \\ &= \int_0^t \left\langle \frac{d}{ds}T_{t-s}^{(m)}T_s^{(n)}x, y\right\rangle ds \\ &= \int_0^t \left\langle -B\mathcal{J}_m T_{t-s}^{(m)}T_s^{(n)}x, y\right\rangle ds + \int_0^t \left\langle T_{t-s}^{(m)}B\mathcal{J}_n T_s^{(n)}x, y\right\rangle ds \\ &= \int_0^t \left\langle B\mathcal{J}_n x - B\mathcal{J}_m x, (T_s^{(n)}T^(m)_{t-s})^* y\right\rangle ds.\end{aligned}$$

Stąd

$$\begin{aligned}\left|\left\langle T_t^{(n)}x - T_t^{(m)}x, y\right\rangle\right| &\leqslant \int_0^t \|\mathcal{J}_m Bx - \mathcal{J}_n Bx\|\|\|y\|ds \\ &\leqslant |t|\|\mathcal{J}_n Bx - \mathcal{J}_m Bx\|\|y\| \\ &\leqslant |t|\left(\|\mathcal{J}_n Bx - Bx\| + \|\mathcal{J}_m Bx - Bx\|\|y\|\right).\end{aligned}$$

Tezę otrzymujemy korzystając z nierówności

$$||Ax|| \leqslant \sup_{||y||\leqslant 1} |\langle Ax, y\rangle|\,, \text{dla } A \in B(\mathcal{H}).$$

Wtedy

$$\begin{aligned} ||T_t^{(n)}x - T_t^{(m)}x|| &\leqslant \sup_{||y||\leqslant 1} \left|\left\langle T_t^{(n)}x - T_t^{(m)}x, y\right\rangle\right| \\ &\leqslant |t| \|\mathcal{J}_m Bx - \mathcal{J}_n Bx\| \|y\| \\ &\leqslant |t| (\|\mathcal{J}_m Bx - Bx\| + \|\mathcal{J}_n Bx - Bx\|) < \varepsilon, \end{aligned} \tag{4.6}$$

dla dostatecznie dużych n, m. Widać też, że zbieżność jest jednostajna, przy ustalonym t. □

4.3 Własności grupy jednoparametrowej operatora samosprzężonego

Lemat 4.7. *Operatory rodziny $\{T_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ mają następujące własności:*

1. *Każdy T_t jest unitarny,*
2. $T_{t+s} = T_t T_s$,
3. $\lim_{t\to 0} T_t x = x$ *dla* $x \in \mathcal{H}$,
4. *Dla każdego* $x \in \mathcal{D}(A)$
$$\lim_{t\to 0} t^{-1}(T_t x - x) = Bx,$$
5. *Jeśli dla danego $x \in \mathcal{H}$ powyższa granica istnieje, to $x \in \mathcal{D}(A)$.*

Dowód.

1. Pokażemy, że $T_t^* T_t x = x$ dla każdego $x \in \mathcal{H}$. Ponieważ $T_t^* = T_{-t}$, więc wystaczy wykazać, że $T_{-t}T_t x = x$. Oczywiście,
$$T_{-t}T_t x = \lim_{n\to\infty} T_t^{(n)} T_{-t}^{(-n)} x.$$
Zauważmy, że
$$\left\|e^{tA} - I\right\| \leqslant \sup_{0\leqslant s\leqslant t} \left\|Ae^{sA}\right\| |t|.$$
Stosując tę nierówność do operatora $T_t^{(n)} T_{-t}^{(-n)}$ otrzymujemy, że
$$\begin{aligned} \left\|T_t^{(n)} T_{-t}^{(-n)} x - x\right\| &\leqslant \sup_{0\leqslant s\leqslant t} \left\|(B\mathcal{J}_n - B\mathcal{J}_{-n}) e^{s(B\mathcal{J}_n - B\mathcal{J}_{-n})} x\right\| |t| \\ &= \sup_{0\leqslant s\leqslant t} \left\|(B\mathcal{J}_n - B\mathcal{J}_{-n}) T_s^{(n)} T_{-s}^{(-n)} x\right\| |t| \\ &\leqslant \|(\mathcal{J}_n - \mathcal{J}_{-n})Bx\| \, |t|, \end{aligned}$$
co przy n dążącym do nieskończoności zbiega do zera.

2. Oczywiście dla t, s tych samych znaków $T_tT_s = \lim_{n\to\infty} e^{tB\mathcal{J}_n}e^{sB\mathcal{J}_n}$. Ponieważ $B\mathcal{J}_n = \mathcal{J}_nB$ i operatory $B\mathcal{J}_n$, $\mathcal{J}_nB$ są ograniczone, więc na mocy Lematu 2.2 $e^{tB\mathcal{J}_n}e^{sB\mathcal{J}_n} = e^{(t+s)B\mathcal{J}_n}$. Stąd
$$\lim_{n\to\infty} e^{tB\mathcal{J}_n}e^{sB\mathcal{J}_n} = \lim_{n\to\infty} e^{(t+s)B\mathcal{J}_n} = T_{t+s}.$$
Załóżmy bez straty ogólności, że $t > s > 0$. Pokażemy, że $T_tT_{-s} = T_{t-s}$. Oczywiście,
$$T_tT_{-s} = T_{t-s+s}T_{-s} = T_{t-s}T_sT_{-s} = T_{t-s},$$
ponieważ już w punkcie 1. sprawdziliśmy, że $T_sT_{-s} = I$.

3. Chcemy pokazać, że $\lim_{t\to 0}\lim_{n\to\infty} T_t^{(n)}x = x$. Rzeczywiście,
$$\lim_{t\to 0}\lim_{n\to\infty} T_t^{(n)}x = \lim_{n\to\infty}\lim_{t\to 0} T_t^{(n)}x = x,$$
ponieważ zgodnie z Twierdzeniem 4.5 można zamienić kolejność przejść granicznych.

4. Mamy,
$$\begin{aligned}\left\|\frac{T_tx-x}{t} - Bx\right\| &= \left\|\frac{T_tx - T_t^{(n)}x}{t} + \frac{T_t^{(n)}x - x}{t} - \mathcal{J}_nBx + \mathcal{J}_nBx - Bx\right\| \\ &\leqslant \left\|\frac{T_tx - T_t^{(n)}x}{t}\right\| + \left\|\frac{T_t^{(n)}x - x}{t} - \mathcal{J}_nBx\right\| + \|\mathcal{J}_nBx - Bx\|\end{aligned}$$
Korzystając z nierówności 4.6 dostajemy $\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{T_tx - T_t^{(n)}x}{t}\right\| = 0$. Na mocy punktu 4 Lematu 4.2 i punktu 5 Lematu 3.4 otrzymujemy
$$\lim_{n\to\infty}\lim_{t\to 0}\left\|\frac{T_t^{(n)}x - x}{t} - \mathcal{J}_nBx\right\| = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{n\to\infty}\|\mathcal{J}_nBx - Bx\| = 0.$$

5. Niech
$$\lim_{t\to 0}\frac{T_tx - x}{t} = y.$$
Jeżeli dla każdego $z \in \mathcal{D}(A)$ zachodzi równość
$$\langle -iBz, x\rangle = \langle z, -iy\rangle,$$
gdzie $B = iA$, to $x \in \mathcal{D}(A^*)$. Ponieważ A jest operatorem samosprzężonym, więc mamy że $x \in \mathcal{D}(A)$. Rzeczywiście, korzystając z podpunktu 4 dostajemy
$$\begin{aligned}\langle -iBz, x\rangle &= \lim_{t\to 0}\frac{\langle -i(T_t - I)z, x\rangle}{t} \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{\langle z, i(T_{-t} - I)x\rangle}{t} = \langle z, -iy\rangle,\end{aligned}$$
co dowodzi tezy.

□

Wniosek 4.8. *Zagadnienie początkowe*

$$\frac{d}{dt}u(t) = Bu(t) + f(t), \quad u(0) = x_0,$$

gdzie $f : \mathbb{R} \to \mathcal{H}$ *jest odwzorowaniem ciągłym, ma dokładnie jedno rozwiązanie* $u : \mathbb{R} \to \mathcal{H}$ *klasy* C^1 *dane wzorem*

$$u(t) = e^{tB}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)B} f(s)ds.$$

Rozwiązanie powyższego zagadnienia początkowego wykorzystuje całkę z funkcji ciągłej o wartościach wektorowych. Zanim przejdziemy do dowodu wniosku przybliżymy to pojęcie.

Definicja 4.9. Podziałem odcinka $[a, b] \subset \mathbb{R}$ nazywamy każdy skończony zbiór $P \subset [a, b]$ zawierający oba końce odcinka. Niech

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_N = b$$

będą punktami podziału P. Odcinki

$$I_k = [t_{k-1}, t_k], \quad 1 \leqslant k \leqslant N,$$

będziemy nazywali odcinkami podziału P.

Definicja 4.10. Niech $\mathcal{H}$ będzie przestrzenią Hilberta, a $\mathbf{f} : [a, b] \to \mathcal{H}$ funkcją ciągłą o wartościach w $\mathcal{H}$. Jako odwzorowanie ciągłe o dziedzinie zwartej $\mathbf{f}$ jest jednostajnie ciągła. Niech P będzie podziałem $[a, b]$ o odcinkach $I_k = [t_{k-1}, t_k]$. Liczbę

$$S(\mathbf{f}, P) = \sum_{k=1}^{N} |I_k| \mathbf{f}(t_k)$$

nazywamy riemannowską sumą całkową funkcji $\mathbf{f}$ wyznaczoną przez podział P. Średnicą podziału P nazywamy liczbę

$$\delta(P) = \max_{1 \leqslant j \leqslant N} |I_j|.$$

Twierdzenie 4.11. *Jeśli* $\{P_n\}$ *jest ciągiem podziałów odcinka* $[a, b]$*, takim że* $\lim_{n\to\infty} \delta(P_n) = 0$*, to*

$$S(\mathbf{f}, Pn) \to \mathbf{s} \in \mathcal{H},$$

gdzie wektor $\mathbf{s}$ *nie zależy od wyboru ciągu. Wektor ten nazywamy całką z* $\mathbf{f}$ *i oznaczamy*

$$\mathbf{s} = \int_a^b \mathbf{f}(t)dt.$$

Ponadto dla całki z funkcji wektorowej zachodzi poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 4.12. *Jeśli* $\mathbf{f} : (a - \varepsilon, b + \varepsilon) \to \mathcal{H}$ *jest różniczkowalna w sposób ciągły, to*

$$\int_a^b \mathbf{f}'(t)dt = \mathbf{f}(b) - \mathbf{f}(a).$$

Zwróćmy uwagę na to, że całkę Riemanna z funkcji wektorowej definiuje się analogicznie jak całkę z funkcji o wartościach rzeczywistych. Ponieważ w dalszej części pracy nie będziemy korzystać więcej z tego pojęcia, dlatego nie będziemy tu wnikać w szczegóły techniczne. W celu wyjaśnienia wszystkich detali odsyłamy czytelnika do [3].

Dowód Wniosku 4.8. Przypomnijmy, że funkcja $u(t)$ o wartościach w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ jest rozwiązaniem równania $\frac{d}{dt}u(t) = Bu(t) + f(t)$, ponadto $B^* = -B$. Rozważmy teraz funkcję $v(t,s) = e^{(t-s)B}u(s)$. Ponieważ operatory B i $e^{(t-s)B}$ komutują, więc dla funkcji v zachodzi równość

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}v(t,s) &= -Be^{(t-s)B}u(s) + e^{(t-s)B}Bu(s) + e^{(t-s)B}f(s)\\ &= e^{(t-s)B}f(s).\end{aligned}$$

Całkując obie strony powyższej równości otrzymujemy, że

$$\int_0^t \frac{d}{ds}v(t,s)ds = \int_0^t e^{(t-s)B}f(s)ds.$$

Korzystając z Twierdzenia 4.12 dostajemy $v(t,t) - v(t,0) = \int_0^t e^{(t-s)B}f(s)ds$, a stąd mamy, że $u(t)$ wyraża się wzorem

$$u(t) = e^{tB}u(0) + \int_0^t e^{(t-s)B}f(s)ds.$$

□

Wniosek 4.13. *Jeśli mocno ciągła rodzina* $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ *operatorów spełnia warunki*

$$\frac{d}{dt}S_t x = BS_t x, \quad S_0 x = x$$

dla każdego $x \in \mathcal{D}(B)$, *to* $S_t = T_t,\ t \in \mathbb{R}$.

Dowód. Wynika to bezpośrednio z jednoznaczności rozwiązania zagadnienia początkowego z Wniosku 4.8. □

Rozdział 5

Twierdzenie Stone'a-von Neumanna

W tym rozdziale sformułujemy Twierdzenie Stone'a-von Neumanna, niestety zostanie ono podane bez dowodu. Będziemy używać oznaczenia $T_t := e^{itA}$ dla $t \in \mathbb{R}$. W dalszej części pracy zakładamy, że istnieje wspólny rdzeń $\tilde{D}$ operatorów A i B taki, że $A, e^{itA} : \tilde{D} \to \mathcal{D}(B)$ i $B, e^{isB} : \tilde{D} \to \mathcal{D}(A)$. W przypadku operatorów P i Q takim rdzeniem jest np. klasa Schwartza.

5.1 Zbiór $G = \{e^{i\lambda}e^{itP}e^{isQ} : (t, s, \lambda) \in \mathbb{R}^3\}$ jako grupa

Twierdzenie 5.1. *Niech $f \in L^2(\mathbb{R})$. Grupa jednoparametrową operatora położenia Q wyraża się wzorem*

$$e^{isQ}f(x) = e^{isx}f(x).$$

Dowód. Pokażemy, że $\{e^{isx}\}_{s\in\mathbb{R}}$ spełnia zagadnienie początkowe

$$\frac{d}{ds}u(s) = iQu(s), \quad u(0) = f(x).$$

Przypomnijmy, że $Qf(x) = xf(x)$, dla $f \in L^2(\mathbb{R})$. Wtedy

$$\frac{d}{ds}e^{isx}f(x) = ixe^{isx}f(x) = iQe^{isx}f(x), \quad e^{i0x}f(x) = f(x).$$

Na mocy 4.8 otrzymujemy równość grup jednoparametrowych $e^{isQ}f(x) = e^{isx}f(x)$. □

Twierdzenie 5.2. *Niech $f \in L^2(\mathbb{R})$. Grupa jednoparametrową operatora pędu P wyraża się wzorem*

$$e^{itP}f(x) = f(x + t).$$

Dowód. Pokażemy, że $\{f(x + t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ spełnia zagadnienie początkowe

$$\frac{d}{dt}u(t) = iPu(t), \quad u(0) = f(x).$$

Przypomnijmy, że $Pf(x) = -i\frac{d}{dx}f(x)$, dla $f \in L^2(\mathbb{R})$. Wtedy

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}f(x + t) &= \frac{d}{dx}f(x + t) = i(-i)\frac{d}{dt}f(x + t) \\ &= iPf(x + t), \quad f(x + 0) = f(x).\end{aligned}$$

Ponownie na mocy 4.8 otrzymujemy równość grup jednoparametrowych $e^{itP}f(x) = f(x+t)$. □

Twierdzenie 5.3. *Zbiór* $G = \{e^{i\lambda}e^{itP}e^{isQ} : (t,s,\lambda) \in \mathbb{R}^3\}$ *tworzy grupę z działaniem mnożenia operatorów.*

Dowód. Elementem neutralnym grupy G jest element $e^{i0}e^{i0P}e^{i0Q} = I$. W celu pokazania, że $e^{i\lambda}e^{itP}e^{isQ}e^{i\lambda_1}e^{it_1P}e^{is_1Q} \in G$ wykażemy najpierw, że

$$e^{itP}e^{isQ} = e^{ist}e^{isQ}e^{itP}.$$

Rzeczywiście,

$$\begin{aligned} e^{itP}e^{isQ}f(x) &= e^{itP}e^{isx}f(x) = e^{is(x+t)}f(x+t) \\ &= e^{ist}e^{isx}f(x+t) = e^{ist}e^{isQ}e^{itP}f(x). \end{aligned}$$

Stąd

$$\begin{aligned} e^{i\lambda}e^{itP}e^{isQ}e^{i\lambda_1}e^{it_1P}e^{is_1Q} &= e^{i(\lambda+\lambda_1)}e^{itP}e^{isQ}e^{it_1P}e^{is_1Q} \\ &= e^{i(\lambda+\lambda_1)}e^{itP}e^{-ist_1}e^{it_1P}e^{isQ}e^{is_1Q} \\ &= e^{i(\lambda+\lambda_1-st_1)}e^{i(t+t_1)P}e^{i(s+s_1)Q}. \end{aligned}$$

Z tego wnioskujemy, że elementem odwrotnym do $e^{i\lambda}e^{itP}e^{isQ}$ jest $e^{-i(\lambda+st)}e^{-itP}e^{-isQ} \in G$. □

Grupę tę nazywamy grupą Heisenberga.

5.2 Twierdzenie Stone'a-von Neumanna i jego konsekwencje

Zanim przejdziemy do sformułowania twierdzenia Stone'a-von Neumanna zdefiniujemy pojęcie rodziny nieprzywiedlnej i pokażemy, że rodzina $\{e^{itP}\}_{t\in\mathbb{R}} \cup \{e^{itQ}\}_{t\in\mathbb{R}}$ jest nieprzywiedlna w $L^2(\mathbb{R})$.

Definicja 5.4. Rodzina $\mathcal{A}$ jest nieprzywiedlna w $L^2(\mathbb{R})$ jeśli jedynymi domkniętymi podprzestrzeniami liniowymi niezmienniczymi na elementy rodziny $\mathcal{A}$ są $\{0\}$ lub $L^2(\mathbb{R})$.

Lemat 5.5. *Rodzina*

$$\{e^{itp}\}_{t\in\mathbb{R}} \cup \{e^{itQ}\}_{t\in\mathbb{R}}$$

jest nieprzywiedlna w $L^2(\mathbb{R})$.

Dowód. Niech $V \subseteq L^2(\mathbb{R})$ będzie domkniętą podprzestrzenią liniową niezmienniczą na przesunięcia i mnożenie przez funkcje e^{itx} dla $t \in \mathbb{R}$. Pokażemy, że wtedy $V = \{0\}$ lub $V = L^2(\mathbb{R})$. Niech $\bar{\varphi} \in L^2(\mathbb{R})$ będzie wektorem spełniajacym warunek

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\bar{\varphi}(x)dx = 0$$

dla każdej funkcji $f \in V$. Ponieważ przestrzeń V jest liniowa i zamknięta na mnożenie przez e^{itx}, więc

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x}f(x)\bar{\varphi}(x)dx = 0.$$

Powyższa całka to transformata Fouriera funkcji $f(x)\bar{\varphi}(x)$. Skoro $\widehat{f(x)\bar{\varphi}(x)} = 0$ to dostajemy, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ $f(x)\bar{\varphi}(x) = 0$. Korzystając teraz z faktu, że V jest zamknięta na translacje otrzymujemy, że dla wszystkich $x,\ y \in \mathbb{R}$ $f(x+y)\bar{\varphi}(x) = 0$. Ustalmy teraz funkcję $f \in V$ i załóżmy o niej, że $f(x) \neq 0$ dla $x \in A \subseteq (a, b)$, gdzie $\lambda((a, b)\backslash A) < \varepsilon$. Przypuśćmy ponadto, że $\bar{\varphi}(x) \neq 0$ dla $x \in B \subseteq (c, d)$, gdzie $\lambda((c, d)\backslash B) < \varepsilon$. Bez straty ogólności załóżmy, że $b-a = d-c$, i $\varepsilon = \frac{1}{4}(b-a)$. Ponieważ V jest niezmiennicza na translacje oznaczałoby to, że dla każdego przesunięcia funkcji f zachodzi warunek $f(x + y)\bar{\varphi}(x) = 0$. Oczywiście nie jest to możliwe. Jeśli bowiem przesunąć funkcję f w taki sposób by $a = c$, wtedy funkcje f i $\bar{\varphi}$ są jednocześnie niezerowe na zbiorze miary dodatniej, a więc $f(x)\bar{\varphi}(x)dx \neq 0$. Oznacza to, że jedynym wektorem prostopadłym do przestrzeni V jest wektor zerowy, a stąd $V = L^2(\mathbb{R})$. $\square$

Twierdzenie 5.6 (Stone'a-von Neumanna)**.** *Jeżeli w ośrodkowej przestrzeni Hilberta jednoparametrowe grupy operatorów unitarnych e^{itA}, e^{itB} spełniają*

$$e^{itA}e^{itB} = e^{its}e^{isB}e^{itA} \tag{5.7}$$

i tworzą razem rodzinę nieprzywiedlną, to istnieje operator unitarny $U : \mathcal{H} \to L^2(\mathbb{R})$ taki, że

$$Ue^{itA}U^{-1} = e^{itP}, \quad Ue^{itA}U^{-1} = e^{itQ},$$

gdzie P, Q są odpowiednio operatorami pędu i położenia.

Równość 5.7 nosi nazwę wzoru komutacyjnego Heisenberga.

Jak wspomnieliśmy wcześniej, nie będziemy dowodzić Twierdzenia Stone'a-von Neumanna. Dowód ten można znaleźć w [2] str. 35-36. Zamiast tego przedstawimy poniżej równoważne sformułowanie wzoru komutacyjnego Heisenberga wyrażone w terminach operatorów P i Q. Zwróćmy uwagę, że w tej postaci wydaje się być ono o wiele prostrze. Jednak w tym przypadku cała trudność ukryta jest w założeniu o równości dziedzin operatorów.

Twierdzenie 5.8. *Operatory A, B spełniają związek komutacyjny $[A, B] = -iI$, gdzie $[A, B] = AB - BA$ wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$e^{itA}e^{isB} = e^{its}e^{isB}e^{itA}.$$

Dowód. ($\Longrightarrow$) Niech $X(t) = [e^{itA}, B] - e^{itA}$. Zauważmy, że $X(t)$ jest rozwiązaniem zagadnienia początkowego

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}X(t) = iAX(t) \\ X(0) = 0. \end{cases}$$

Rzeczywiście,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}([e^{itA}, B] - te^{itA}) &= \frac{d}{dt}(e^{itA}B - Be^{itA} - te^{itA}) \\ &= iAe^{itA}B - iBAe^{itA} - e^{itA} - tiAe^{itA} \\ &= iAe^{itA}B + i(-AB - iI)e^{itA} - e^{itA} - tiAe^{itA} \\ &= iAe^{itA}B - iABe^{itA} + e^{itA} - e^{itA} - tiAe^{itA} \\ &= iA([e^{itA}, B] - te^{itA}) = iAX(t). \end{aligned}$$

Na mocy Wniosku 4.8 jest to jedyne rozwiązanie tego zagadnienia początkowego. Stąd otrzymujemy, że

$$[e^{itA}, B] = te^{itA}, \text{ jeśli } [A, B] = -iI.$$

Pokażemy teraz, że $e^{itA}e^{isB} = e^{its}e^{isB}e^{itA}$. W tym celu wprowadźmy oznaczenia

$$\begin{aligned} L(s) &= e^{-\frac{1}{2}its}e^{itA}e^{isB} \\ R(s) &= e^{isB}e^{itA}e^{\frac{1}{2}its}. \end{aligned}$$

Mamy

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}L(s) &= \frac{d}{ds}e^{-\frac{1}{2}its}e^{itA}e^{isB}\\ &= -\frac{1}{2}ite^{-\frac{1}{2}its}e^{itA}e^{isB} + e^{-\frac{1}{2}its}ie^{itA}Be^{isB}\\ &= e^{-\frac{1}{2}its}(-\frac{1}{2}ite^{itA}e^{isB} + i(Be^{itA} + te^{itA})e^{isB})\\ &= i(B + \frac{1}{2}t)L(s)\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}R(s) &= \frac{d}{ds}e^{isB}e^{itA}e^{\frac{1}{2}its}\\ &= iBe^{isB}e^{itA}e^{\frac{1}{2}its} + \frac{1}{2}ite^{isB}e^{itA}e^{\frac{1}{2}its}\\ &= i(B + \frac{1}{2}t)R(s).\end{aligned}$$

Ponadto $L(0) = e^{itA} = R(0)$, więc zachodzi równość $L(s) = R(s)$. Stąd

$$e^{itA}e^{itB} = e^{its}e^{isB}e^{itA}.$$

($\Longleftarrow$) W celu wykazania implikacji w drugą stronę zróżniczkujmy obustronnie równość $e^{itA}e^{isB} = e^{its}e^{isB}e^{itA}$ względem t. Otrzymujemy wtedy, że

$$iAe^{itA}e^{isB} = ise^{its}e^{isB}e^{itA} + e^{its}e^{isB}iAe^{itA}.$$

Przyjmując $t = 0$ dostajemy

$$iAe^{isB} = ise^{isB} + e^{isB}iA.$$

Ponownie różniczkując obustronnie tym razem względem s i podstawiając $s = 0$ dostajemy, że

$$(iA)(iB) = i + (iB)(iA).$$

Stąd

$$AB - BA = -iI.$$

□

Twierdzenie 5.9. *Niech A, B będą operatorami takimi, że $[A,B] = -iI$. Wtedy zbiór*

$$\tilde{G} = \{e^{itA}e^{itB}e^{iu} : t, s, u \in \mathbb{R}\}$$

z działaniem mnożenia operatorów tworzy grupę.

Dowód. Dowód tego twierdzenia przebiega analogicznie do dowodu Twierdzenia 5.3. Rzeczywiście, elementem neutralnym grupy $\tilde{G}$ jest element $e^{i0}e^{i0A}e^{i0B} = I$. Ponieważ $e^{itA}e^{itB} = e^{its}e^{isB}e^{itA}$, więc

$$e^{iu}e^{itA}e^{isB}e^{iu_1}e^{it_1A}e^{is_1B} = e^{i(u+u_1-st_1)}e^{i(t+t_1)A}e^{i(s+s_1)B} \in \tilde{G}.$$

Zatem elementem odwrotnym do $e^{iu}e^{itA}e^{isB}$ jest $e^{-i(u+st)}e^{-itA}e^{-isB} \in \tilde{G}$. □

Z Twierdzenia Stone'a-von Neumanna wynika, że grupa ta jest izomorficzna z grupą Heisenberga. Fizycznym wnioskiem z Twierdzenia Stone'a-von Neumanna jest fakt, że wszystkie modele mechaniki kwantowej, w których możliwa jest relacja $[P,Q] = -i\hbar I$ są unitarnie równoważne.

Bibliografia

[1] Gerald B. Folland, *Fourier analysis and its applications*, The Warsworth Brooks/Cole mathematics series, **1992**

[2] Gerald B. Folland, *Harmonic analysis in phase space*, Princeton University Press, **1989**

[3] Marian Grabowski, Roman S. Ingarden, *Mechanika kwantowa. Ujęcie w przestrzeni Hilberta*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, **1989**

[4] Keith Hannabuss, *An Introduction to Quantum Theory*, Oxford UP, **1997**

[5] Yitzhak Katznelson, *An introduction to Harmonic analysis*, Stanford University, California, **2002**

[6] Krzysztof Maurin, *Analiza cz. I*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, **1991**

[7] Włodzimierz Mlak, *Wstęp do teorii przestrzeni Hilberta*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, **1970**

[8] Julian Musielak, *Wstęp do analizy funkcjonalnej*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, **1976**

[9] Walter Rudin, *Analiza Funkcjonalna*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, **2009**

[10] Kato Tosio, *Perturbation theory for linear operators*, Springer-Verlag , **1995**

[11] Kosaku Yosida, *Functional analysis*, Springer-Verlag, **1965**