ANALIZA FUNKCJONALNA II
LISTA SEMESTRALNA

1. Na przestrzeni Hilberta $L^2(\Omega,\mu)$ rozpatrujemy odwzorowanie $M_\varphi f = \varphi \cdot f$, gdzie $\varphi \in L^\infty$. Pokaż, że $\|M_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty$. Sprawdź, że spektrum M_φ pokrywa się ze zbiorem istotnych wartości φ, tj.

$$\sigma(M_\varphi) = \bigcap_{\mu(S)=0} \overline{\varphi(\Omega \setminus S)}.$$

2. Na przestrzeni $X = C([0,1])$ działa operator liniowy $M_\varphi f = \varphi \cdot f$, gdzie φ jest ustaloną funkcją ciągłą. Znajdź jego normę i spektrum.

3. Rozwiąż zadania 16,17,18,19,20 ze skryptu.

4. Niech X, Y będą przestrzeniami unormowanymi. Dla $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ definiujemy operator dualny $T' : Y^\star \to X^\star$ wzorem $< x, T'y^\star >=< Tx, y^\star$, $x \in X, y^\star \in Y^\star$. Pokaż, że T' jest $1-1$, wtedy i tylko wtedy gdy T ma gęsty obraz.

5. Udowodnij, że jeśli T' ma gęsty obraz, to T jest $1-1$, ale odwrotna implikacja nie musi być prawdziwa. Rozważ przykład operatora

$$(Tx)_n = x_{n+1} - x_n, \qquad x \in X = c_0(\boldsymbol{Z}).$$

6. Niech H bedzie przestrzenią Hilberta. Niech $C : H^\star \to H$ przyporządkowuje funkcjonałowi $f \in H^\star$ wektor $y = C(f)$, taki że $f(x) =< x, C(f) >$ dla $x \in H$. Czy C jest liniowe? Dla $A \in \mathcal{L}(H)$ definiujemy $A^\star : H \to H$ wzorem $A^\star = CA'C^{-1}$. Pokaż, że $A \to A^\star$ jest inwolucją w algebrze $\mathcal{L}(H)$, tj. odwzorowaniem anyliniowym spełniającym dodatkowo warunki $(AB)^\star = B^\star A^\star$ oraz $(A^\star)^\star = A$.

7. Niech a_n będzie ciągiem liczb rzeczywistych, takim że $a_{n+m} \leqslant a_n + a_m$ dla $n, m \in \boldsymbol{N}$. Pokaż, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \inf_{n\in\boldsymbol{N}} \frac{a_n}{n}.$$

8. Niech $A^\star = A \in \mathcal{B}(H)$, gdzie H jest przestrzenią Hilberta. Pokaż, że

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} |< Ax, y >| = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} \mathrm{Re} < Ax, y > | = \sup_{\|x\|=1} |< Ax, x >|$$

9. Niech $A : H \to H$ będzie odwzorowaniem liniowym przestrzeni Hilberta H, takim że $< Ax, x >\geqslant 0$ dla $x \in H$. Udowodnij, że $A = A^\star \in \mathcal{B}(H)$.

10. Wiedząc, że operator $A \in \mathcal{B}(X)$ jest odwracalny oraz że $A = BC = CB$, gdzie $B, C \in \mathcal{B}(X)$, pokaż, że B, C są także odwracalne.

11. Niech V bedzie operatorem Volterry na $L^2([0,1])$. Udowodnij, że dla każdego $n \in \boldsymbol{N}$

$$V^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-y)^{n-1} f(y)\, dy.$$

12. Niech V bedzie operatorem Volterry na $L^2([0,1])$. Pokaż, że dla $f \in C^n([0,1])$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + V^n f^{(n)}(x), \qquad n \in \boldsymbol{N}.$$

13. Niech $T \in \mathcal{X}$. Udowodnij, że $\sigma(T') \subset \sigma(T)$.

14. Dane są dwa ciągi operatorów ograniczonych (A_k) i (B_k) na przestrzeni Banacha X. Ponadto

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} A_k, \qquad B = \sum_{k=1}^{\infty} B_k,$$

gdzie oba szeregi są zbieżne, a jeden z nich absolutnie. Niech $C_n = \sum_{k=0}^{n} A_k B_{n-k}$. Pokaż, że szereg $\sum_n C_n$ jest zbieżny i zachodzi równość

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n = AB.$$

Zauważ analogię ze wzorem $\int f \star g = \int f \cdot \int g$.

15. Udowodnij, że obraz kuli jednostkowej $B \subset C([0,1])$ przez operator Volterry $V \in \mathcal{B}(C([0,1]))$ jest zbiorem warunkowo zwartym.

16. Rozwiąż zadania 22-27 ze skryptu.

17. Udowodnij, że ciąg wektorów $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ w przestrzeni Hilberta X z bazą ON $\{e_n\}$ jest słabo zbiezny do wektora $x \in X$, wtedy i tylko wtedy gdy jest ograniczony i $\langle x_k, \varepsilon_n \rangle \to \langle x, e_n \rangle$ dla każdego n.

18. Dany jest ciąg (x_n) elementów przestrzeni Hilberta. Pokaż, że jeśli $x_n \to x_0$ słabo i $\|x_n\| \to \|x_0\|$, to $x_n \to x_0$ w normie.

19. Podaj przykład ciągu (x_n) w c_0, który jest zbieżny słabo, ale nie w normie, do $x_0 \in c_0$, chociaż $||x_n\| \to \|x_0\|$.

20. Pokaż, że ograniczony ciąg (f_n) elementow $C(X)$, gdzie X jest zwartą przestrzenią Hausdorffa jest słabo zbieżny, wtedy i tylko wtedy gdy jest zbieżny punktowo.

21. (*) Ciąg (f_n) zbieżny słabo w $C([0,1])$ jest zbieżny w normie $\|\cdot\|_p$ dla $1 \leqslant p < \infty$.

22. Pokaż, że sfera $\{x \in X : \|x\| = 1\}$ w przestrzeni Hilberta X nie jest słabo zwarta.

23. Udowodnij, że ciąg $f_n \in L^p(\boldsymbol{R})$, $1 < p < \infty$, jest słabo zbieżny, wtedy i tylko wtedy gdy jest ograniczony i $\int_a^b f_n(t)\,dt \to 0$ dla każdych $a, b \in \boldsymbol{R}$.

24. Sprawdź, że w przestrzeni unormowanej X słaba topologia pokrywa się z normową, wtedy i tylko wtedy gdy $\dim X < \infty$.

25. Wykaż, że w przestrzeni dualnej $X^\star$ topologia *-słaba jest słabsza od słabej.

26. Niech f_k, $1 \leqslant k \leqslant n$ będą funkcjonałami liniowymi na przestrzeni wektorowej X. Niech φ będzie jeszcze jednym funkcjonałem na tej przestrzeni, takim że $\bigcap_{k=1}^n \ker f_k \subset \ker \varphi$. Udowodnij, że φ jest kombinacją liniową funkcjonałów f_k.

27. Niech $\varphi : X \to \boldsymbol{K}$ będzie funkcjonałem liniowym na przestrzeni liniowej X ciągłym w topologii wyznaczonej przez pewną rozdzielającą punkty rodzinę funkcjonałów $\mathcal{F}$. Pokaż, że istnieje półnorma p_F, gdzie $F \subset \mathcal{F}$ jest skończona, taka że $|\varphi(x)| \leqslant C p_F(x)$ dla $x \in X$.

28. Niech $\varphi : X \to \boldsymbol{K}$ będzie funkcjonałem liniowym na przestrzeni liniowej X ciągłym w topologii wyznaczonej przez pewną rozdzielającą punkty rodzinę funkcjonałów $\mathcal{F}$. Pokaż, że $\varphi \in \operatorname{lin} \mathcal{F}$.

29. Niech $F : X^\star \to \boldsymbol{K}$ będzie *-słabo ciągłym funkcjonałem liniowym. Pokaż, że istnieje $x_F \in X$, taki że $F(f) = f(x_F)$.

30. Niech X będzie zespoloną przestrzenią unormowaną. Pokaż, że słabe topologie w X nad $\boldsymbol{C}$ i $\boldsymbol{R}$ są identyczne.

31. Zadania 28–51 ze Skryptu.