**Izometrie przestrzeni $l^p(n)$ nad R**

Dla $p \geqslant 1$ rozważamy normę wektora $x \in \mathbf{R}^n$ zadaną wzorem

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)^{1/p} .$$

Niech $l_p(n)$ oznacza przestrzeń $\mathbf{R}^n$ wyposażoną w tę normę. Niech $e_j$ oznacza $j$-ty wektor bazy zero-jedynkowej.

**Twierdzenie 1.** *Niech $1 < p \neq 2$. Dla każdej liniowej izometrii $A$ przestrzeni $l_p(n)$ istnieje permutacja $\sigma$ zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$, taka że*

$$Ae_j = \pm e_{\sigma_j}, \qquad 1 \leqslant j \leqslant n,$$

*gdzie znaki $\pm$ są wybrane dowolnie i niezależnie.*

*Innymi słowy, odwzorowanie $A$ jest złożeniem odwzorowania permutacyjnego i pewnej liczby odbić względem hiperpłaszczyzn $x_j = 0$, a jego macierz mozna otrzymać permutując kolumny macierzy*

$$\begin{pmatrix} \pm1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \pm1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \pm1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \pm1 \end{pmatrix},$$

*gdzie znaki $\pm$ są wybrane dowolnie i niezależnie.*

*Dowód.* Szkic dowodu przedstawimy w postaci ciągu szczegółowych poleceń. Niech $A$ i $p$ spełniają założenia naszego twierdzenia.

**1.** Pokaż, że jeśli $1/p + 1/q = 1$, to $A^T$ jest izometrią $\mathbf{R}^n_q$. Skorzystaj ze wzoru

$$\|x\|_p = \sup_{\|y\|_q=1} < Ax, y > .$$

**2.** Niech $(a_{ij})$ będzie macierzą $A$ w bazie wektorów $e_j$. Zauważ, że

$$\sum_{k=1}^{n} |a_{kj}|^p = 1, \qquad \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|^q = 1$$

dla każdych $1 \leqslant i, j \leqslant n$.

**3.** Stosując nierówność Höldera i korzystając z zadania 2, wyprowadź oszacowanie

$$\sum_{i,j} a_{ij}^2 \leqslant n.$$

**4.** Pokaż, że $|\det A| = 1$. Skorzystaj z tego, że

$$\mu(A(B)) = |\det A| \mu(B),$$

gdzie $B$ jest zbiorem mierzalnym względem miary Lebesgue'a $\mu$. Przyjmij za $B$ kulę jednostkową w $l_p(n)$.

**5.** Zauważ, że $A^T A$ jest odwzorowaniem symetrycznym i dodatnim, więc w pewnej bazie ortonormalnej $u_j$
$$A^T A\, u_j = \lambda_j u_j,$$
gdzie $\lambda_j > 0$.

**6.** Korzystając z dwóch poprzednich zadań, pokaż, że
$$\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n = 1.$$

**7.** Sprawdź, że
$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = \sum_{i,j} a_{ij}^2.$$
Skorzystaj z tego, że ślad odwzorowania nie zależy od wyboru bazy, więc
$$\mathrm{Tr}\, A^T A = \sum_{k=1}^{n} < A^T A\, e_k, e_k >= \sum_{k=1}^{n} \|Ae_k\|_2^2.$$

**8.** Wykorzystując nierówność między średnią geometryczną a arytmetyczną, wywnioskuj z zadań 3,6 i 7, że $\lambda_j = 1$ dla każdego $j$, a więc $A^T A = I$ i wobec tego $A$ jest odwzorowaniem ortogonalnym.

**9.** Sprawdź, że $(a_{ij})$ jest macierzą typu opisanego w twierdzeniu. W tym celu zauważ, że skoro
$$\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|^p = \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|^2 = 1, \qquad p \neq 2,$$
to istnieje $i_0$, takie że $a_{ij} = 0$ dla $i \neq i_0$ i $|a_{i_0 j}| = 1$.

$\square$

**Uwaga 1.** Twierdzenie jest prawdziwe także dla $p = 1$. Jednak w tym wypadku dowód jest znacznie prostszy i bardziej intuicyjny. Wystarczy zauważyć, że wektory $\pm e_j$ są jedynymi punktami ekstremalnymi kuli jednostkowej w $\mathbf{R}_1^n$ i wobec tego każda izometria musi je permutować (z zachowaniem liniowej niezależności).

**Uwaga 2.** Opisane izometrie są wspólne dla wszystkich $l_p(n)$, gdzie $1 \leqslant p < \infty$, jednak w przypadku $p = 2$ dochodzą jeszcze obroty i odwzorowania opisanego typu względem innych baz ortonormalnych. Tak więc grupa izometrii przestrzeni $l_p(n)$ dla $p \neq 2$ jest niezwyle uboga w porównaniu z grupą izometrii przestrzeni euklidesowej. W szczególności jest skończona i liczy $n! \cdot 2^n$ elementów.