Nie ma izometrii pomiędzy $l^p(n)$ i $l^q(n)$, gdy $1 < p < q < \infty$ i $n > 1$.

Niech V_1 i V_2 będą rzeczywistymi przestrzeniami wymiaru n. Niech F_1 i F_2 będą normami odpowiednio w V_1 i V_2 klasy C^1 poza zerem. Niech S_1, S_2 będą odpowiednio sferami jednostkowymi w tych przestrzeniach. Niech $A : V_1 \to V_2$ będzie izometrią.

1. *Jeśli u jest wektorem stycznym do S_1 w punkcie x_0, to Au jest wektorem stycznym do S_2 w punkcie Ax_0.*

Dowód. Zauważmy, że

$$u \in T_{x_0}(S_1) \iff F_1'(x_0) \cdot u = 0, \qquad v \in T_{Ax_0}(S_2) \iff F_2'(Ax_0) \cdot v = 0,$$

a ponadto $F_2(Ax) = F_1(x)$ dla $x \in V_1$. Wystarczy więc zróżniczkować ostatnią równość, aby otrzymać żądaną implikację. □

Mówimy, że wektor jednostkowy u jest wektorem stycznym do S_1 w x_0 stopnia co najmniej α , jeśli

$$|F_1(x_0 + tu) - F(x_0) \cdot u| \leqslant Ct^\alpha$$

Mówimy, że punkt x_0 jest punktem styczności stopnia co najmniej $\alpha > 0$, jeśli każdy wektor styczny długości 1 w x_0 ma styczność stopnia co najmniej α.

Jeśli natomiast

$$\lim_{t\to 0} \frac{|F_1(x_0 + tu) - F(x_0) \cdot u|}{|t|^\alpha} = c > 0.$$

dla danego u (dla wszystkich u), to mówimy, że wektor u (punkt x_0) ma styczność stopnia dokładnie α.

2. *Jeśli u jest wektorem stycznym do S_1 w punkcie x_0 stopnia co najmniej α, to Au jest wektorem stycznym do S_2 w punkcie Ax_0 stopnia co najmniej α.*

Dowód. Skoro $F_2(Ax) = F_(x)$, to

$$F_2(Ax_0 + tAu) - F_2(Ax_0) = F_1(X_0 + tu) - F_1(x_0),$$

skąd teza. □

3. *Jeśli F_1 jest klasy C^2 w punkcie $x_0 \in S_1$, to x_0 jest punktem styczności stopnia co najmniej 2 w kierunku każdego wektora jednostkowego $u \in T_{x_0}(S_1)$.*

Dowód. Skoro $u \in T_{x_0}(S_1)$, to $F_1'(x_0) \cdot u = 0$, a więc na mocy twierdzenia Taylora

$$|F_1(x_0 + tu) - F(x_0)| = |F_1(x_0 + tu) - F(x_0) - F_1'(x_0) \cdot u| \leqslant Ct^2,$$

o co chodziło. □

Niech teraz $1 < p < 2$ i niech

$$F_1(x) = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p}.$$

W punktach $x_0 = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in S_1$, w których $x_1 \cdot \dots \cdot x_n \neq 0$, spełnione są założenia (3). Mamy więc

$$|F_1(x_0 + tu) - F(x_0)| \leqslant Ct^2. \tag{4}$$

Wyróżnijmy zbiór E wektorów sfery jednostkowej, w których $|x_{k_0}| = 1$ dla pewnego $1 \leqslant k_0 \leqslant 1$. Wtedy $x_k = 0$ dla $k \neq k_0$.

5. *Jeśli* $x_0 \in E$, *to*

$$\lim_{t\to 0} \frac{|F_1(x_0+tu) - F(x_0)|}{|t|^p} = c > 0, \qquad \|u\| = 1,$$

a więc punkt x_0 *jest punktem styczności stopnia dokładnie* p.

Dowód. Zajmijmy się punktem $x_0 = (1, 0, 0, \ldots, 0)$. Każdy z pozostałych punktów można otrzymać jako obraz przez izometrię $l^p(n)$, a więc i tam sytuacja wygląda analogicznie. Mamy $u = (0, u_2, u_3, \ldots, u_n) = (0, v)$, gdzie $\|v\|_{l^p(n-1)} = 1$, a więc

$$|F_1(x_0+tu) - F(x_0)| = (1+|t|^p)^{1/p} - 1 = \frac{|t|^p}{p} + O(t^2),$$

co dowodzi naszej tezy. □

6. *Jeśli* $x_0 \in S_1 \setminus E$, *to istnieje wektor jednostkowy* $u \in T_{x_0}(S_1)$ *o styczności stopnia co najmniej* 2.

Dowód. Po izometrycznym przekształceniu możemy założyć, że

$$x_0 = (x_1, x_2, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0), \qquad x_1 \cdot \cdots \cdot x_k \neq 0, \qquad \sum_{j=1}^{k} |x_j|^p = 1.$$

Niech $y_0 = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \in l^p(k)$. Na mocy (4) istnieje wektor jednostkowy $v \in T_{y_0}(S_1')$, gdzie S_1' jest sferą jednostkową w $l^p(k)$, taki, że

$$|F_1(x_0+tu) - F_1(x_0)| = |F_1(y_0+tv) - F_1(y_0)| \leqslant Ct^2,$$

gdzie $u = (v, 0) \in l^p(n)$. □

7. *Jeśli* $1 < p < q < \infty$, *to nie ma izometrii liniowej pomiędzy przestrzeniami* $l^p(n)$ *i* $l^q(n)$.

Dowód. Jeśli $1 < p < q < 2$, to sfera S_1 w $V_1 = l^p(n)$ ma na mocy (6) punkty styczności dokładnie stopnia p, a sfera S_2 w $V_2 = l^q(n)$ nie ma takich punktów na mocy (6) i (4). Izometria jest więc niemożliwa ze względu na (2).

Jeśli $1 < p < 2 \leqslant q < \infty$, to norma F_2 jest klasy C^2 poza 0 i sfera S_2 ma tylko punkty styczności stopnia co najmniej 2, a więc izometria znów nie wchodzi w grę.

Pozostaje przypadek $2 \leqslant p < q < \infty$, który wynika z powyższych rozważań i następującego spostrzeżenia

8. *Niech* $1 < p < q < \infty$ *i niech* $1/p + 1/p' = 1, 1/q + 1/q' = 1$. *Jeśli* $A : l^p(n) \to l^q(n)$ *jest izometrią, to* $A^\star : l^{q'}(n) \to l^{p'}(n)$ *też jest izometrią.*

Rzeczywiście, mamy

$$\|A^\star y\|_{p'} = \sup_{\|x\|_p=1} |< A^\star y, x >| = \sup_{\|x\|_p=1} |< y, Ax >| = \sup_{\|z\|_p=1} |< y, z >= \|y\|_{q'},$$

bo A jest izometrią. □

I jeszcze jeden wniosek.

9. *Jeśli T jest liniową izometrią przestrzeni $l^p(n)$ i $p \neq 2$, to $T(E) = E$.*

Dowód. Jeśli $1 < p < 2$, to $T(E) = E$, bo punkty styczności dokładnie stopnia p muszą przejść na takież. Jeśli zaś $p > 2$, wystarczy skorzystać z Lematu (8). W przypadku $l^1(n)$ i $l^\infty(n)$ stosujemy podobną argumentację z udziałem punktów ekstremalnych. $\square$