OPERATOR DUALNY NA PRZESTRZENI BANACHA

Niech $T : X \to Y$ będzie ciągłym odwzorowaniem liniowym przestrzeni Banacha.

0.1. *Jeśli* $\operatorname{Im} T'$ *jest gęsty w* $X^\star$*, to* $\ker T = \{0\}$.

0.2. *Jeśli* $\operatorname{Im} T$ *jest gęsty w* Y*, to* $\ker T' = \{0\}$.

0.3. *Warunek* $\ker T = \{0\}$ *nie pociąga gęstości* $\operatorname{Im} T'$.

Dowód. Niech $X = \mathbf{c_0}(\boldsymbol{Z})$. Definiujemy operator liniowy $T : X \to X$ wzorem

$$Tx(n) = x(n+1) - x(n).$$

Warunek $Tx = 0$ implikuje, że ciąg x jest stały, co dla ciągu z $X = \mathbf{c_0}(\boldsymbol{Z})$ oznacza $x = 0$. Zatem T jest różnowartościowy. Prosty rachunek pokaże, że

$$T'y(n) = y(n-1) - y(n)$$

dla ciągów $y \in \mathbf{l^1}(\boldsymbol{Z})$. Mamy też

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} T'y(n) = 0,$$

a więc obraz T' mieści się w domkniętej podprzestrzeni ciągów o średniej zero, która jest jądrem ciągłego funkcjonału i wobec tego nie jest gęsta w $X^\star = \mathbf{l^1}(\boldsymbol{Z})$. $\square$

0.4. *Uwaga.* Jeśli $1 < p < \infty$, przestrzeń ciągów o średniej zero jest gęsta, ale też przestrzenie te są refleksywne i implikacja, której tu zaprzeczyliśmy, jest prawdziwa.