Norma operatora hermitowskiego

1. *Niech T będzie operatorem hermitowskim na przestrzeni Hilbeta X. Wtedy*

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} | < Tx, x > |.$$

Dowód. Niech $A = \sup_{\|x\|=1} | < Tx, x > |$. Nierówność $A \leqslant \|T\|$ jest łatwa. Aby uzasadnić nierówność przeciwną przyjmijmy, że $x, y \in X$ oraz $\|x\| = \|y\| = 1$. Niech $\alpha^2 = \|x + y\|^2$. Z równości równoległoboku wynika, że $\|x - y\|^2 = 4 - \alpha^2$. Mamy

$$\begin{aligned} 4|\operatorname{Re} < Tx, y > | &= | < T(x+y), x+y > - < T(x-y), x-y > | \\ &\leqslant \alpha^2 A + (4 - \alpha^2)A = 4A, \end{aligned} \tag{2}$$

a więc

$$|\operatorname{Re} < Tx, y > | \leqslant A.$$

Niech c będzie liczbą o module 1, taką, że

$$| < Tx, y > | = c < Tx, y >=< T(cx), y > .$$

Stosując (2), otrzymujemy

$$| < Tx, y > | =< T(cx), y >= \operatorname{Re} < T(cx), y >\leqslant A,$$

skąd już łatwo wynika teza.

$\square$