Częściowe izometrie i rozkład polarny

Niech X, Y będą przestrzeniami Hilberta. Opertator liniowy $U : X \to Y$ nazywa się *unitarny*, jeśli

$$< Ux, Uy >=< x, y >, \qquad x, y \in X.$$

0.1. Theorem (Mazur-Ulam). *Każda surjektywna izometria rzeczywistych przestrzeni unormowanych jest odwzorowaniem afinicznym.*

0.2. Corollary. *Odwzorowanie U przestrzeni Hilberta jest surjektywną izometrią zachowującą 0, wtedy i tylko wtedy gdy jest unitarne lub antyunitarne.*

Mówimy, że operator $U \in \mathcal{L}(X)$ jest *częściową izometrią*, jeśli

$$\|Ux\| = \|x\|, \qquad x \perp \ker U.$$

0.3. *Operator U na przestrzeni Hilberta jest częściową izometrią, wtedy i tylko wtedy gdy operatory $U^\star U$ i $UU^\star$ są projektorami ortogonalnymi.*

Dowód. Wprowadźmy oznaczenia

$$M = \ker U^\perp, \qquad N = \overline{\operatorname{Im} U}.$$

Nietrudno zauważyć, że $U : M \to N$ oraz $U^\star : N \to M$. Ponadto

$$(U|M)^\star = U^\star|N.$$

Zatem U jest częściową izometrią, wtedy i tylko wtedy, gdy

$$U^\star U = I_M, \qquad UU^\star = I_N,$$

a stąd natychmmiast wynika teza. □

W związku z przeprowadzonym dowodem nasuwa się następujące spostrzeżenie.

0.4. *Niech U będzie ograniczonym operatorem na przestrzeni Hilberta. Jeśli $U^\star U$ jest rzutem, to także $UU^\star$ jest rzutem.*

Dowód. Zachowajmy oznaczenia z poprzedniego dowodu. Jeśl $U^\star U$ jest rzutem (na M), to

$$\|Ux\|^2 =< U^\star Ux, x >= \|x\|^2, \qquad x \in M,$$

więc $U : M \to N$ oraz $U^\star : N \to M$ są bijekcjami, więc warunek $U^\star U = I_M$ pociąga $UU^\star = I_N$. □

0.5. *Dla operatora A na X istnieje dokladnie jedna izometria częściowa, taka że*

$$A = U|A|, \qquad \ker(U) = \ker(A),$$

Dowód. Definiujemy

$$U : |A|(X) \to \overline{A(X)}$$

wzorem $U(|A|x) = Ax$ i $Ux = 0$ dla $x \in \ker(A)$. Jak widać, $\|Uy\| = \|y\|$, więc U rozszerza się przez gęstość do częściowej izometrii

$$U : \overline{|A|(X)} \to \overline{A(X)}.$$

□