1. W przestrzeni unormowanej X dana jest hiperpłaszczyzna domknięta H nieprzechodząca przez 0. Pokaż, że istnieje dokładnie jeden funkcjonał liniowy $f \in X^\star$, taki że $H = \{x \in X : f(x) = 1\}$.

2. W przestrzeni liniowej X dany jest zbiór wypukły B, który jest ograniczony, symetryczny i zawiera 0 jako swój punkt wewnętrzny. Pokaż, że funkcjonał Minkowskiego μ_B jest normą.

3. W przestrzeni unormowanej X każdy zbiór wypukły domknięty o niepustym wnętrzu jest przekrojem swoich domkniętych hiperpłaszczyzn podpierających.

4. Pokaż, że $T : X \to Y$ jest liniową izometrią przestrzeni unormowanych, wtedy i tylko wtedy gdy $T' : Y^\star \to X^\star$ jest izometrią.

5. Niech $X = l^2$ nad $\mathbf{R}$. Niech $A = \mathbf{R} \cdot \delta_0$ oraz

$$B = \{x \in l^2 : \forall_{n \geqslant 1}\ x_0 \geqslant |n^2 x_n - n|\}.$$

Pokaż, że A i B są rozłącznymi domkniętymi zbiorami wypukłymi oraz $B - A$ jest gęsty w l^2. Wywnioskuj, że A i B nie można rozdzielić funkcjonałem ciagłym.

6. Pokaż, że w przestrzeni L^p, $1 < p < \infty$, dla każdego wektora istnieje dokładnie jeden funkcjonał wyciągający normę.

7. W przestrzeni unormowanej X dany jest podzbiór A, taki że dla każdego funkcjonału f, obraz $f(A)$ jest ograniczony. Pokaż, że sam zbiór A jest ograniczony. Skorzystaj z twierdzenia Banacha-Steinhausa dla przestrzeni $X^\star$.

8. Niech M będzie wypukłym podzbiorem rzeczywistej przestrzeni unormowanej X. Pokaż, że jeśli $\operatorname{int} M \neq \emptyset$, to $\overline{M} = \overline{\operatorname{int} M}$.

9. Niech

$$M = \{x \in l^2 : \forall_n |x_n| \leqslant 1/n\}.$$

Pokaż, że M jest wypukły i domknięty, a ponadto $\operatorname{int} M = \emptyset$. Sprawdź, że M nie ma płaszczyzny podpierającej w żadnym punkcie.

10. Niech X będzie przestrzenią unormowaną i niech

$$B = \{x \in X : \|x\| \leqslant 1\}, \qquad D = \{z \in \mathbf{C} : |z| \leqslant 1\}.$$

Pokaż, że funkcja $\varphi : B \to D$ spełniająca warunki

a) $\varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x)$ dla $x \in B$, $\lambda \in D$,

b) $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ dla $\|x\| + \|y\| \leqslant 1$,

przedłuża się jednoznacznie do funkcjonału liniowego $f \in X^\star$.

11. Niech $\{e_n\}$ będzie nieskończonym układem ON w przestrzeni Hilberta X. Pokaż, że $e_n \to 0$ słabo.

12. Pokaż, że kula B w przestrzeni Hilberta X jest słabo zwarta, a jej sfera nie.

13. Udowodnij, że ciąg $f_n \in L^p(\mathbf{R})$, $1 < p < \infty$, jest słabo zbieżny, wtedy i tylko wtedy gdy jest ograniczony i $\int_a^b f_n(t)\,dt \to 0$ dla każdych $a, b \in \mathbf{R}$.

14. Udowodnij, że ciąg słabo zbieżny w $C([0,1])$ jest mocno zbieżny w $L^p([0,1])$.

15. Udowodnij, że ciąg $f_n \in C([0,1])$ jest słabo zbieżny do 0, wtedy i tylko wtedy gdy jest ograniczony i zbieżny punktowo.

16. Sprawdź, że żadna z przestrzeni $C([0,1])$, $\mathbf{c}_0$ nie jest ciągowo słabo zupełna.

17. Pokaż, że przestrzeń l^1 jest ciągowo słabo zupełna.