1. Dany jest rzut P w przestrzeni Hilberta. Pokaż, że P jest rzutem ortogonalnym, wtedy i tylko wtedy gdy $Px \perp x - Px$ dla każdego x.
2. Dany jest rzut P w przestrzeni Hilberta H. Pokaż, że P jest rzutem ortogonalnym, wtedy i tylko wtedy gdy $< Px, y >=< x, Py >$ dla każdych $x, y \in H$.
3. Dane jest odwzorowanie liniowe $A : X \to X$ przestrzeni Hilberta X spełniające warunek symetrii $< Ax, y >=< x, Ay >$ dla każdej pary $x, y \in X$. Korzystając z twierdzenia o wykresie domkniętym, pokaż, że A jest ciągłe.
4. Niech X, Y będą przestrzeniami unormowanymi. Dla $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ definiujemy operator dualny $T' : Y^\star \to X^\star$ wzorem $< x, T'y^\star >=< Tx, y^\star$, $x \in X, y^\star \in Y^\star$. Pokaż, że a) T jest $1-1$, wtedy i tylko wtedy gdy T' ma gęsty obraz, b) T' jest $1-1$, wtedy i tylko wtedy gdy T ma gęsty obraz.
5. Niech H bedzie przestrzenią Hilberta. Niech $C : H^\star \to H$ przyporządkowuje funkcjonałowi $f \in H^\star$ wektor $y = C(f)$, taki że $f(x) =< x, C(f) >$ dla $x \in H$. Czy C jest liniowe? Dla $A \in \mathcal{L}(H)$ definiujemy $A^\star : H \to H$ wzorem $A^\star = CA'C^{-1}$. Pokaż, że $A \to A^\star$ jest inwolucją w algebrze $\mathcal{L}(H)$, tj. odwzorowaniem anyliniowym spełniającym dodatkowo warunki $(AB)^\star = B^\star A^\star$ oraz $(A^\star)^\star = A$.
6. Udowodnij, że transformata Laplace'a
$$Lf(x) = \int_0^\infty e^{-xy} f(y)\, dy$$
jest operatorem liniowym na $L^2(0, \infty)$ o normie $\|L\| = \sqrt{\pi}$.
7. Udowodnij, że dla operatora Volterry spełnione są oszacowania
$$\|V^n f\|_p \leqslant \frac{1}{n!}\|f\|_p, \qquad f \in L^p([0,1]), \qquad 1 < p \leqslant \infty.$$
Oblicz $\|V^n\|$ w przestrzeni $\mathcal{B}(L^p([0,1]))$.
8. Dana jest rodzina funkcjonałów liniowych $\mathcal{F}$ rozdzielająca punkty na przestrzeni wektorowej X. Sprawdź, że dla każdego skończonego podzbioru $F \subset \mathcal{F}$ wzór
$$p_F(x) = \sup_{f \in F} |f(x)|$$
definiuje półnormę, a rodzina półnorm $\{p_F\}$ wyznacza na X topologię Hausdorffa, względem której działania przestrzeni wektorowej są ciągłe. Jak trzeba dobrać $\mathcal{F}$, aby otrzymać a) słabą topologię na przestrzeni Banacha, b) *-słabą topologię na dualnej do przestrzeni Banacha, c) słabą topologię operatorową w $\mathcal{L}(X, Y)$, gdzie X, Y są przestrzeniami Banacha?
9. Niech $\varphi : X \to \mathbf{K}$ będzie funkcjonałem liniowym na przestrzeni liniowej X ciągłym w topologii wyznaczonej przez pewną rozdzielającą punkty rodzinę funkcjonałów $\mathcal{F}$. Korzystając z dwóch poprzednich zadań, pokaż, że $\varphi \in \operatorname{lin} \mathcal{F}$.
10. Niech $\varphi : X \to \mathbf{K}$ będzie funkcjonałem liniowym na przestrzeni liniowej X ciągłym w topologii wyznaczonej przez pewną rozdzielającą punkty rodzinę funkcjonałów $\mathcal{F}$. Pokaż, że istnieje półnorma p_F, gdzie $F \subset \mathcal{F}$ jest skończona, taka że $|\varphi(x)| \leqslant Cp_F(x)$ dla $x \in X$.
11. Niech f_k, $1 \leqslant k \leqslant n$ będą funkcjonałami liniowymi na przestrzeni wektorowej X. Niech φ będzie jeszcze jednym funkcjonałem na tej przestrzeni, takim że $\bigcap_{k=1}^n \ker f_k \subset \ker \varphi$. Udowodnij, że φ jest kombinacją liniową funkcjonałów f_k.