1. Niech $\varphi \in C([0,1])$ i niech $T_\varphi : L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$ będzie zadany wzorem $T_\varphi f = \varphi f$. Niech ponadto $Z_\varphi(\lambda) = \{t \in [0,1] : \varphi(t) = \lambda\}$. Udowodnij, że
a) T_φ jest $1-1$, wtedy i tylko wtedy gdy $Z_\varphi(0)$ jest miary zero,
b) T_φ ma obraz gęsty, wtedy i tylko wtedy gdy jest $1-1$,
c) T_φ jest „na”, wtedy i tylko wtedy gdy jest odwracalny.
2. Wywnioskuj z poprzedniego zadania, że
a) $\lambda \in \sigma_p(T_\varphi) \iff Z_\varphi(\lambda)$ jest miary dodatniej,
b) $\sigma_r(T_\varphi) = \emptyset$,
c) $\lambda \in \sigma_c(T_\varphi) \iff Z_\varphi(\lambda)$ jest niepustym zbiorem miary zero.
3. Niech a_n będzie ciągiem liczb rzeczywistych, takim że $a_{n+m} \leqslant a_n + a_m$ dla $n, m \in \mathbf{N}$. Pokaż, że
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \inf_{n\in\mathbf{N}} \frac{a_n}{n}.$$
4. Dane są dwa rozłączne wypukłe zbiory w rzeczywistej przerstrzeni unormowanej. Udowodnij, że zbiory te można rozdzielić funkcjonałem (hiperpłaszczyzną), jeśli a) jeden z nich jest otwarty, b) oba są domknięte i jeden z nich jest zwarty.
5. Dany jest operator T na przestrzeni Banacha X. Pokaż, że a) $\sigma_r(T) \subset \sigma_p(T')$, b) $\sigma_c(T) = \sigma_c(T')$, c) $\sigma_p(T) \subset \sigma_p(T') \cup \sigma_r(T')$.
6. W przestrzeni Hilberta $X = l^2(\mathbf{N})$ rozważamy operatory przesdunięcia $Tx = (0, x_0, x_1, \dots)$ i $Sx = (x_1, x_2, \dots)$. Pokaż, że $T^\star = S$ oraz, że a) $\sigma(T) = \bar{K}(0,1) = \sigma(S)$, b) $\sigma_r(T) = K(0,1) = \sigma_p(S)$, c) $\sigma_c(S) = S(0,1) = \sigma_c(S)$.
7. Niech $A^\star = A \in \mathcal{B}(H)$, gdzie H jest przestrzenią Hilberta. Pokaż, że
$$\|A\| = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} | < Ax, y > | = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} \mathrm{Re} < Ax, y > | = \sup_{\|x\|=1} | < Ax, x > |$$
8. Niech $A : H \to H$ będzie odwzorowaniem liniowym przestrzeni Hilberta H, takim że $< Ax, x > \geqslant 0$ dla $x \in H$. Udowodnij, że $A = A^\star \in \mathcal{B}(H)$.
9. Dany jest operator $U \in \mathcal{H}$, taki że $U^\star U$ i $UU^\star$ są projektorami. Pokaż, że U jest częściową izometrią.
10. Dany jest ciąg operatorów $A_n \geqslant 0$ w przestrzeni Hilberta zbieżny a) w normie, b) mocno do A. Udowodnij, że wtedy $A_n^{1/2}$ dąży a) w normie, b) mocno do $A^{1/2}$.
11. Dany jest ciąg operatorów ograniczonych A_n w przestrzeni Hilberta zbieżny w normie do A. Udowodnij, że wtedy $|A_n|$ dąży w normie do $|A|$.
12. Dany jest ciąg operatorów ograniczonych A_n w przestrzeni Hilberta, taki że $A_n \to A$ mocno i $A_n^\star \to A$ mocno. Udowodnij, że wtedy $|A_n|$ dąży do $|A|$ mocno.
13. Podaj przykład ograniczonego operatora na przestrzeni a) Banacha, b) Hilberta, którego obraz nie jest domknięty.
14. Ciągi $A_n, B_n \in \mathcal{B}(H)$ są mocno zbieżne. Pokaż, że ciąg $A_n B_n$ jest też mocno zbieżny.
15. Niech $f, g \in L^2(\mathbf{R})$. Pokaż, że funkcja
$$F(x) = \int_{\mathbf{R}} f(x-y) g(y)\, dy$$
należy do $C_0(\mathbf{R})$.
16. Niech $H = L^2(\mathbf{R})$ i niech $T_t f(x) = f(x+t)$. Znajdź $\|T_t\|$. Znajdź słabe operatorowe granice $\lim_{t\to\pm\infty} T_t$.
17. Niech X będzie zwartą przestrzenią metryczną, a $\mathcal{F} \subset C(X)$ zbiorem zwartym. Pokaż, że topologia zbieżności punktowej w $\mathcal{F}$ pokrywa się z topologią zbieżności jednostajnej.