1. Niech $f$ będzie lewostronnie ciągłą funkcją na $\mathbf{R}$. Korzystając z lematu Vitaliego, udowodnij, że $f$ jest mierzalna w sensie Lebesgue'a. Czy $f$, która jest w każdym punkcie lewostronnie lub prawostronnie ciągła też jest mierzalna?
2. Na przestrzeni Hilberta $L^2(\Omega, \mu)$ rozpatrujemy odwzorowanie $M_\varphi f = \varphi \cdot f$, gdzie $\varphi \in L^\infty$. Pokaż, że $\|M_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty$. Sprawdź, że spektrum $M_\varphi$ pokrywa się ze zbiorem istotnych wartości $\varphi$, tj.
$$\sigma(M_\varphi) = \bigcap_{\mu(S)=0} \overline{\varphi(\Omega \setminus S)}.$$
3. Dana jest przestrzeń unormowana $X$. Udowodnij, że jeśli $X^\star$ jest ośrodkowa, to i $X$ jest ośrodkowa,
4. Sprawdź, że kula jednostkowa w $l^\infty$ jest ośrodkowa w $^\star$-słabej topologii.
5. Niech $U$ będzie izometrią rzeczywistej przestrzeni unormowanej $X$ na całą przestrzeń $X$. Udowodnij, że $U$ jest odwzorowaniem afinicznym (twierdzenie Mazura-Ulama, patrz Prus-Stachura, zadanie 5.C.5).
6. Udowodnij, że odwzorowanie $U$ przestrzeni Hilberta jest surjektywną izometrią zachowującą 0, wtedy i tylko wtedy gdy jest unitarne lub antyunitarne.
7. Niech $H = L^2(\mathbf{R}_+, e^{-x^2}\,dx)$ i niech $T_t f(x) = e^{t(x+\frac{3}{2}t)} f(x+t)$ dla $t > 0$. Pokaż, że $\|T_t\| = 1$ dla każdego $t > 0$. Znajdź mocną operatorową granicę $\lim_{t\to\infty} T_t$.
8. Dany jest operator $T \in \mathcal{B}(H)$, gdzie $H$ jest zespoloną przestrzenią Hilberta. Udowodnij, że jeśli $< Tx, x >= 0$ dla każdego $x \in H$, to $T = 0$. Pokaż na przykładzie, że w przestrzeni rzeczywistej takie wynikanie nie zachodzi.
9. Niech $P$ i $Q$ będą ortogonalnymi projektorami w przestrzeni Hilberta. Pokaż, że jeśli $PQ = QP$, to $PQ$ jest projektorem ortogonalnym.
10. Niech $P$ i $Q$ będą ortogonalnymi projektorami w przestrzeni Hilberta. Udowodnij, że istnieje granica $R = s-\lim_{\to\infty}(PQ)^n$ i jest projektorem ortogonalnym na $P(H) \cap Q(H)$.
11. Dana jest przestrzeń Banacha $X$ z unormowaną bazą Schaudera $\{e_n\}$, co oznacza, że każdy wektor $x \in X$ ma jednoznaczne przedstawienie w postaci zbieżnego szeregu $x = \sum_{n=1}^\infty \alpha_n(x) e_n$. Udowodnij, że
$$||x\|_1 = \sup_N \left\| \sum_{n=1}^N \alpha_n(x) e_n \right\|$$
jest normą równoważną wyjściowej. Wywnioskuj stąd, że $\alpha_n$ są ciągłymi funkcjonałami na $X$ o normach wspólnie ograniczonych.
12. Spróbuj udowodnić tezę poprzedniego zadania bezpośrednio dla klasycznej bazy Schaudera w $C([0,1])$.
13. Niech $X$ będzie przestrzenią unormowaną. Udowodnij, że kula jednostkowa w $X^\star$ jest *-słabo metryzowalna, w tedy i tylko wtedy gdy $X$ jest ośrodkowa.
14. Niech $X$ będzie przestrzenią unormowaną. Pokaż, że kula jednostkowa w $X$ jest *-słabo gęsta w $X^{\star\star}$ przy standardowym włożeniu $\tau : X \to X^{\star\star}$.