1. Dane są dwie domknięte podprzestrzenie X i Y przestrzeni Hilberta H, takie że $X+Y=H$ i $X\cap Y=\{0\}$. Pokaż, że istnieje stała $c>0$, taka że

$$\|x-y\|\geqslant c, \qquad x\in X,\ y\in Y,\ \|x\|=\|y\|=1.$$

2. Niech $\{e_n\}$ będzie bazą przestrzeni Hilberta H. Rozważ przykład przestrzeni

$$X=\overline{< e_{2n} : n\in \mathbf{N} >}, \qquad Y=\overline{< e_{2n}+e_{2n+1}/n : n\in \mathbf{N} >}.$$

Sprawdź, że $X\cap Y=\{0\}$, ale istnieją ciągi $x_n\in X$ i $y_n\in Y$, takie że $\|x_n\|=\|y_n\|=1$ i $\|x_n-y_n\|\to 0$. Wywnioskuj stąd, że $X+Y$ nie jest podprzestrzenią domkniętą.

3. Niech X, Y będą domkniętymi podprzestrzeniami przestrzeni Banacha i niech $\dim Y<\infty$. Pokaż, że $X+Y$ jest podprzestrzenią domkniętą.

4. Dany jest operator samosprzężony A na przestrzeni Hilberta H. Wiadomo, że $\|A\|=1$, ale A nie ma wartości własnej o module 1. Pokaż, że $A^n\to 0$ mocno, ale nie w normie. Dlaczego wykluczyliśmy wartości własne o module 1?

5. Dany jest operator zwarty T na przestrzeni Banacha X. Wiadomo, że $\|T\|\leqslant 1$, ale T nie ma wartości własnej o module 1. Pokaż, że $T^n\to 0$ w normie.

6. Dany jest zwarty operator T w przestrzeni Banacha X. Rozpatrzmy równanie $Tx=\lambda x+b$, gdzie dane są wektor b i liczba $\lambda\neq 0$. Udowodnij alternatywę Fredholma, która mówi, że zachodzi jedna z wykluczających się możliwości: 1) Dla każdego $b\in X$ równanie ma dokładnie jedno rozwiązanie. 2) Dla każdego $b\in X$ równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań lub nie ma ich wcale.

7. Na $L^2(0,\infty)$ definiujemy operator liniowy $Tf(s)=s^{-1}\int_0^s f(t)\,dt$. Udowodnij, że jest on ograniczony, ale nie zwarty.

8. Dany jest operator z jądrem całkowym $Tf(x)=\int k(x,y)f(y)\,dy$ na $C([0,1])$. Pokaż, że jeśli jądro k jest funkcją ciągłą, to jest on zwarty. Pokaż, że operator Volterry jest zwarty na $C([0,1])$, chociaż nie ma ciągłego jądra.

9. Wiadomo, że przestrzeń Banacha X jest refleksywna. Udowodnij, że każdy operator liniowy ciągły z X w $\mathbf{l^1}$ i każdy operator ciągły z $\mathbf{c_0}$ w X jest zwarty.

10. Dla danego ciągu liczbowego $c=(c_n)$ definiujemy operator liniowy w $\mathbf{c_0}$ wzorem $(T_cx)_n=c_nx_n$. Udowodnij, że T_c jest ciągły $\iff$ c jest ograniczony. Natomiast T_c jest zwarty $\iff$ $c_n\to 0$.

11. Kiedy rzut ortogonalny w przestrzeni Hilberta jest zwarty?

12. Pokaż, że jeśli T jest operatorem zwartym, a S odwracalnym w przestrzeni Banacha, to $\mathrm{Im}\,(T+S)$ jest domknięty.

13. Dany jest operator hermitowski A na przestrzeni Hilberta H, taki że A^2 jest zwarty. Pokaż, że A jest zwarty.

14. Niech H będzie przestrzenią Hilberta. Udowodnij, że $A\in\mathcal{C}(H)\iff |A|\in\mathcal{C}(H)$.

15. Dany jest operator zwarty na przestrzeni Banacha. Pokaż, że jeśli $T(X)$ jest przestrzenią domkniętą, to $\dim T(X)<\infty$.