Miary regularne na przestrzeni lokalnie zwartej

Niech X będzie przestrzenią topologiczną lokalnie zwartą. Niech $\mathcal{G}$ oznacza rodzinę zbiorów otwartych, $\mathcal{F}$ rodzinę zbiorów domkniętych, $\mathcal{K}$ rodzinę zbiorów zwartych, a $\mathcal{B}$ rodzinę zbiorow borelowskich w X. Oczywiście $\mathcal{B}$ jest σ-ciałem generowanym przez $\mathcal{G}$.

Mówimy, że zbiór $B \in \mathcal{B}$ jest *regularny* względem miary borelowskiej μ, jeśli

$$\mu(B) = \sup_{\mathcal{K} \ni K \subset B} \mu(K) = \inf_{B \subset G \in \mathcal{G}} \mu(G).$$

Pieewsza równość definiuje *regularność wewnętrzną*, a druga *zewnętrzną*. Jeżeli wszystkie zbiory borelowskie są regularne względem miary μ, to μ nazywa się *regularna*.

Mówimy, że, że miara borelowska μ jest *miarą Radona*, jeśli $\mu(K) < \infty$ dla $K \in \mathcal{K}$ oraz

$$\mu(G) = \sup_{\mathcal{K} \ni K \subset G} \mu(K), \qquad \mu(B) = \inf_{B \subset U \in \mathcal{G}} \mu(U)$$

dla każdego $G \in \mathcal{G}$ i każdego $B \in \mathcal{B}$.

Lemat 1. *Klasa zbiorów regularnych wględem miary borelowskiej na przestrzeni lokalnie zwartej jest zamknięta na monotoniczne sumy przeliczalne.*

Lemat 2. *Niech μ będzie skończoną miarą borelowską na przestrzeni lokalnie zwartej X. Wówczas zbiory regularne tworzą σ-pierścień. Jeśli X jest σ-zwarta, to zbiory regularne tworzą σ-ciało.*

Dowód. Jeśli zbiory $E, F \in \mathcal{B}$ są regularne i $F \subset E$, to dla danego $\varepsilon > 0$ istnieją zbiory $K, C \in \mathcal{K}$ i zbiory $G, U \in \mathcal{G}$, takie że

$$K \subset E \subset G, \qquad C \subset F \subset U$$

oraz $\mu(G) < \mu(K) + \varepsilon$, $\mu(U) < \mu(C) + \varepsilon$. Wtedy

$$K \setminus U \subset E \setminus F \subset G \setminus C,$$

gdzie $K \setminus U \in \mathcal{K}$, $G \setminus C \in \mathcal{G}$ i

$$\mu(G \setminus C) < \mu(G) - \mu(C) < \mu(K) - \mu(U) + 2\varepsilon \leq \mu(K \setminus U) + 2\varepsilon,$$

więc klasa zbiorów regularnych jest zamknięta na monotoniczne różnice. Podobnie pokazujemy, że jest także zamknięta na przekroje. Potem wystarczy skorzystać z Lematu 1.

Jeśli X jest σ-zwarta, to X jest zbiorem regularnym, więc σ-pierścień zbiorów regularnych jest σ-ciałem. $\square$

Lemat 3. *Jeśli X jest lokalnie zwarta, to skończona miara Radona jest regularna. .*

Dowód. Jak wiemy z Lematu 2, zbiory regularne tworzą σ-pierścień. W przypadku miary Radona zawiera on zbiory otwarte, więc jest σ-ciałem borelowskim $\mathcal{B}$. $\square$

Lemat 4. *Jeśli X jest lokalnie zwarta i σ-zwarta, to każda miara Radona μ jest regularna.*

Dowód. Wystarczy pokazać, że μ jest wewnętrznie regularna.

Niech $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, gdzie $X_n \subset X_{n+1}$ i $X_n \in \mathcal{K}$. Wtedy dla każdego zbioru borelowskiego B i każdego n zbiór $B \cap X_n$ jest na mocy Lematu 3 wewnętrznie regularny w X_n, a więc i w X. Ponieważ $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B \cap X_n$, teza wynika z Lematu 1. $\square$

Lemat 5. *Jeśli X jest przestrzenią lokalnie zwartą i każdy jej podzbiór otwarty jest σ-zwarty, to każda miara borelowska na X jest regularna.*

Dowód. Na mocy Lematu 1 wystarczy pokazać, że zbiór borelowski warunkowo zwarty jest regularny. Niech B będzie takim zbiorem. Niech G będzie warunkowo zwartym zbiorem otwartym zawierającym B. Przestrzeń lokalnie zwarta G jest skończonej miary i wszystkie jej zbiory otwarte są regularne, bo są σ-zwarte. Zatem na mocy Lematu 2 każdy jej podzbiór borelowski B jest regularny. Jako że G jest otwarty, B jest regularny także w X. □

Funkcjonały liniowe na $C_c(X)$

Dla $f \in C_c(X)$ i $G \in \mathcal{G}$ symbol $f \ll \chi_G$ oznacza, że $f \le \chi_G$ i $\operatorname{supp} f \subset G$. Niech φ będzie nieujemnym funkcjonałem liniowym na $C_c(X)$. Dla dowolnego $G \in \mathcal{G}$ definiujemy

$$\varphi^\star(G) = \sup\{\varphi(f) : C_c(X) \ni f \ll \chi_G\},$$

a następnie dla dowolnego $E \subset X$

$$\mu^\star(E) = \inf\{\varphi^\star(G) : E \subset G \in \mathcal{G}\}.$$

Lemat 6. *Mamy*

$$\mu^\star(G) = \varphi^\star(G), \qquad G \in \mathcal{G}, \tag{7}$$

$$\mu^\star(\emptyset) = 0, \tag{8}$$

$$\varphi^\star\Big(\bigcup_{k=1}^\infty G_k\Big) \le \sum_{k=1}^\infty \varphi^\star(G_k), \qquad G_k \in \mathcal{G}, \tag{9}$$

$$\mu^\star\Big(\bigcup_{k=1}^\infty E_k\Big) \le \sum_{k=1}^\infty \mu^\star(E_k), \qquad E_k \subset X, \tag{10}$$

Dowód. Własności (7) i (8) są oczywiste.

Aby dowieść (9) rozważmy $f \in C_c(G)$ spełniającą $f \ll \chi_G$, gdzie $G = \bigcup_{k=1}^\infty G_k$. Zbiór zwarty $K = \operatorname{supp} f \subset G$ zawiera się w skończonej sumie $K \subset \bigcup_{k=1}^N G_k$, więc istnieją funkcje $f_k \in C_c(G_k)$, takie że $\sum_{k=1}^N f_k(x) = 1$ dla $x \in K$. Mamy zatem

$$f = \sum_{k=1}^N f_k \cdot f, \qquad f_k \cdot f \ll \chi_{G_k},$$

a stąd

$$\varphi(f) = \sum_{k=1}^N \varphi(f_k \cdot f) \le \sum_{k=1}^\infty \mu^\star(G_k),$$

co już implikuje tezę.

Własność (10) wynika z (9) w standardowy sposób. □

Wniosek 11. *Funkcja zbioru $\mu^\star$ jest miarą zewnętrzną.*

Lemat 12. *Jeśli $\chi_E \le f \in C_c(X)$, gdzie $E \subset X$, to $\mu^\star(K) \le \varphi(f)$.*

Dowód. Niech $0 < \varepsilon < 1$. Wtedy $E \subset G_\varepsilon$, gdzie

$$G_\varepsilon = \{x \in X : f(x) > 1 - \varepsilon\}.$$

Ponadto $\chi_G \le \frac{1}{1-\varepsilon} f$, więc

$$\mu^\star(E) \le \mu^\star(G_\varepsilon) \le \frac{1}{1-\varepsilon}\varphi(f),$$

co wobec dowolności ε daje tezę. $\square$

Lemat 13. *Niech G i H będą otwarte. Niech $K \subset G$ będzie zwarty. Wtedy*

$$\mu^\star(G) + \mu^\star(H) \le \mu^\star(G \cup H) + \mu^\star(G \cap H), \tag{14}$$

$$\mu^\star(G) = \mu^\star(G \setminus K) + \mu^\star(K). \tag{15}$$

Dowód. Niech $g \ll \chi_G$ i $h \ll \chi_H$ będą takie, że

$$\mu^\star(G) < \varphi(g) + \varepsilon, \qquad \mu^\star(H) < \varphi(h) + \varepsilon.$$

Wtedy $g \vee h \ll \chi_{G\cup H}$ i $g \wedge h \ll \chi_{G\cap H}$, więc

$$\begin{aligned} \mu^\star(G) + \mu^\star(H) &\le \varphi(g) + \varphi(h) + 2\varepsilon = \varphi(g \vee h) + \varphi(g \wedge h) + 2\varepsilon \\ &\le \mu^\star(G \cup H) + \mu^\star(G \cup H) + 2\varepsilon, \end{aligned}$$

co wobec dowolności $\varepsilon > 0$ dowodzi (14).

Niech teraz $f \ll \chi_{G\setminus K}$ będzie taka, że $\mu^\star(G \setminus K) < \varphi(f) + \varepsilon$. Niech $g \in C_c(X)$ spełnia warunki $\chi_K \le g$ i $\mathrm{supp} g \cap \mathrm{supp} f = \emptyset$. Wtedy $f = g \ll \chi_G$, więc

$$\mu^\star(G) \ge \varphi(f + g) = \varphi(f) + \varphi(g),$$

skąd na mocy założeń o f i g oraz Lematu 12

$$\mu^\star(G) > \mu^\star(G \setminus K) + \mu^\star(K) - \varepsilon,$$

co wobec dowolności $e > 0$ kończy dowód. $\square$

Twierdzenie 16 (Riesz). *Niech φ będzie nieujemną formą liniową na $C_c(X)$, gdzie X jest lokalnie zwartą przestrzenią topologiczną. Istnieje wtedy dokładnie jedna miara Radona μ, taka że*

$$\int f(x)\,\mu(dx) = \varphi(f), \qquad f \in C_c(X). \tag{17}$$

Dowód. Na mocy Wniosku 11 forma φ wyznacza miarę zewnętrzną $\mu^\star$. Z twierdzenia Caratheodory'ego wynika, że zbiory $\mu^\star$-mierzalne tworzą σ-ciało $\mathcal{M}$, a $\mu^\star$ ograniczona do $\mathcal{M}$ jest miarą. Pokażemy teraz, że zbiory otwarte są mierzalne, skąd jako wniosek otrzymamy, że σ-ciało zbiorów borelowskich $\mathcal{B}$ zawiera się w $\mathcal{M}$, a $\mu = \mu^\star\big|\mathcal{B}$ jest miarą.

Rzeczywiście, niech $G \in \mathcal{G}$ i niech $E \subset X$. Niech $E \subset U \in \mathcal{G}$ i niech $\mu^\star(U) < \mu^\star(E) + \varepsilon$. Niech dalej K będzie zbiorem zwartym zawartym w G i spełniającym $\mu^\star(G) < \mu^\star(K) + \varepsilon$. Niech wreszcie $G_1 = G \cap U$ i $G_2 = U \setminus K$. Wtedy

$$\mu^\star(E \cap G) + \mu^\star(E \setminus G) \le \mu^\star(G_1) + \mu^\star(G_2)$$

i na mocy (14)

$$\begin{aligned}\mu^\star(E\cap G)+\mu^\star(E\setminus G) &\le \mu^\star(G_1\cup G_2)+\mu^\star(G_1\cap G_2)\\ &\le \mu^\star(U)+\mu^\star(G\setminus K)<\mu^\star(E)+2\varepsilon,\end{aligned}$$

co wobec dowolności $\varepsilon>0$ i $E\subset X$ pociąga mierzalność G.

Przechodzimy do równości (17). Dla danego $\varepsilon>0$ niech

$$u=\sum_{j=1}^{p} c_j\chi_{K_j},\qquad K_j\in\mathcal{K},$$

będzie dobrana tak, by $f\le u$ i $\int u d\mu<\int f d\mu+\varepsilon$. Niech $K_j\subset G_j\in\mathcal{G}$ spełniają $\mu(G_j)<\mu(K_j)+\delta$ i niech $\chi_{K_j}\ll\chi_{G_j}$. Niech $g=f\vee\sum_{j=1}^{p}c_jg_j$. Wtedy $f\le g$ i funkcja g różni się od u na zbiorze dowolnie małej miary. Jeśli więc δ jest dostatecznie mała, to

$$\varphi(f)\le\varphi(g)<\int u d\mu+\varepsilon<\int f d\mu+2\varepsilon,$$

skąd wobec dowolności ε, mamy $\varphi(f)\le\int f d\mu$, a więc także

$$\int f d\mu=-\int -f d\mu\le-\varphi(-f)=\varphi(f),$$

co kończy tę część dowodu.

To że miara μ jest miarą Radona i jej jednoznaczność widać z samej konstrukcji. $\square$

Wnioski i uwagi

Z Lematu 4 wynika natychmiast

Wniosek 18. *Niech φ będzie nieujemną formą liniową na $C_c(X)$, gdzie X jest lokalnie zwartą i σ-zwartą przestrzenią topologiczną. Istnieje wtedy dokładnie jedna regularna miara borelowska μ, taka że*

$$\int f(x)\,\mu(dx)=\varphi(f),\qquad f\in C_c(X). \tag{19}$$

Przykład. Niech $X=\mathbf{R}^2$ z topologią produktową, gdzie na pierwszej osi wprowadzamy topologię dyskretną, na drugiej zaś naturalną topologię prostej. Ta topologia jest oczywiście lokalnie zwarta, ale nie σ-zwarta. Niech

$$\varphi(f)=\sum_{x\in\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}} f(x,y)\,dy,\qquad f\in C_c(X).$$

Niech μ będzie miarą skonstruowaną w dowodzie twierdzenia Riesza. Każda prosta pionowa $U_x=\{x\}\times\mathbf{R}$ jest zbiorem otwartym i miara μ ograniczona do tego zbioru jest po prostu miarą Lebesgue'a. Niech $E_y=\mathbf{R}\times\{y\}$ dla ustalonego $y\in\mathbf{R}$. Jest to zbiór domknięty. Ponieważ każde otoczenie punktu (x,y) zawiera odcinek leżący na prostej U_x, każdy zbiór otwarty G zawierający E_y zawiera nieprzeliczalnie wiele zbiorów miary dodatniej i dlatego $\mu(G)=\infty$. Stąd także $\mu(E_y)=\infty$. Z drugiej strony jedynymi podzbiorami zwartymi E_y są zbiory skończone, więc $\sup_{K\subset E_y}\mu(K)=0$. To pokazuje, że miara Radona μ nie jest regularna.

Przestrzeń $\mathbf{R}^n$ spełnia założenia Lematu 5. Tutaj odpowiedność między funkcjonałami liniowymi na C_c i miarami borelowskimi jest kompletna.

Wniosek 20. *Niech φ będzie nieujemną formą liniową na $C_c(\mathbf{R}^n)$. Istnieje wtedy dokładnie jedna miara borelowska μ, taka że*

$$\int f(x)\,\mu(dx) = \varphi(f), \qquad f \in C_c(\mathbf{R}^n). \tag{21}$$

Literatura

(1) N. Bourbaki, *Integration*, rozdział 3,
(2) G. Federer, *Geometric Measure Theory*, rozdział 2.2.5,
(3) P. Halmos, *Measure Theory,* rozdział 10.56,
(4) J. Kingman, S. Taylor, *Measure and Probability*, rozdział 9.5,
(5) S. Łojasiewicz, *Wstęp do teorii funkcji rzeczywistych*, rozdział 6.4,
(6) W. Rudin, *Analiza rzeczywista i zespolona*, rozdział 2.

(pg)