Rzuty i domknięte podprzestrzenie

Niech X będzie przestrzenią wektorową. Rzutem w X nazywamy każde odwzorowanie liniowe P, takie że $P^2 = P$.

1. *Jeśli $P : X \to X$ jest rzutem, to*

$$X = X_1 \oplus X_2,$$

gdzie $X_1 = P(X)$, $X_2 = \ker P$. I na odwrót, każdy rozklad $X = X_1 \oplus X_2$ wyznacza rzut P, taki że $X_1 = P(X)$, $X_2 = \ker P$.

Mówimy wtedy, że P jest rzutem na X_1 w kierunku X_2.

2. *Niech X będzie przestrzenią Banacha, a P rzutem X na podprzestrzeń domkniętą X_1 w kierunku podprzestrzeni X_2. Rzut P jest ciągły, wtedy i tylko wtedy gdy X_2 jest podprzestrzenią domkniętą.*

Dowód. Jeśli P jest ciągły, to $X_2 = \ker P$ jest oczywiście domknięta. Przypuśćmy teraz, że X_2 jest domknięta i rozważmy odwzorowanie

$$T : X_1 \times X_2 \to X, \qquad T(x_1, x_2) = x_1 + x_2.$$

Jak widać, jest to izomorfizm algebraiczny ciągły, bo

$$\|T(x_1, x_2)\| = \|x_1 + x_2\| \leqslant \|x_1\| + \|x_2\| = \|(x_1, x_2)\|.$$

Na mocy twierdzenia Banacha istnieje stała $C > 0$, taka że

$$\|(x_1, x_2)\| \leqslant C\|x\|,$$

skąd

$$\|Px\| = \|x_1\| \leqslant C\|x\|,$$

co dowodzi, że P jest ciągły. □

3. *Niech $T : X \to Y$ będzie ciągłym odwzorowaniem liniowym Banacha X na przestrzeń Banacha Y. Niech $X_1 = \ker T$. Wtedy przestrzenie X/X_1 i Y są izomorficzne jako przestrzenie Banacha. Jeśli ponadto istnieje ciągły rzut $P : X \to X_1$ w kierunku domkniętej podprzestrzeni X_2, to X/X_1, X_2 i Y są izomorficzne.*

Dowód. Niech $\widetilde{T}(x + X_1) = Tx$ będzie odwzorowaniem X/X_1 na Y. Jak wiadomo, jest to ciągły izomorfizm algebraiczny, więc z twierdzenia Banacha o odwzorowaniu odwrotnym jest on izomorfizmem topologicznym. Jeśli dodatkowo X_1 ma domknięte dopełnienie algebraiczne X_2, to biorąc za T ciągły rzut na X_2 w kierunku X_1, otrzymamy topologiczny izomorfizm X_2 i X/X_1, □

W dalszym ciągu postaramy się skonstruować przykład pokazujący, że

4. *Nie każda domknięta podprzestrzeń X_1 przestrzeni Banacha X jest obrazem X przez pewien ciągły rzut P. Innymi słowy, może się zdarzyć, że żadne z algebraicznych dopełnień X_2 przestrzeni X_1 nie jest domknięte.*

Oto najważniejszy krok.

Twierdzenie 5 (Schur)**.** *Jeżeli ciąg (x_n) jest zbieżny słabo do zera w l^1, to jest też zbieżny w normie.*

Dowód. Niech ciąg $(x_n) \subset l^1$ będzie zbieżny słabo do zera. Przypuśćmy nie wprost, że nie jest on zbieżny w normie. Wybierając odpowiedni podciąg i normalizując, możemy przyjąć, że $\|x_n\|_1 = 1$ dla wszystkich n. Wybierzemy ciągi liczb naturalnych $n_k < n_{k+1}$ oraz $p_k < p_{k+1}$, takie że

$$\sum_{p_k \leqslant j < p_{k+1}} |x_{n_k}(j)| \geqslant 2/3. \tag{6}$$

Niech mianowicie $n_1 = 1$ i $p_1 = 1$. Niech p_2 będzie takie, że

$$\sum_{1 \leqslant j < p_2} |x_1(j)| \geqslant 2/3.$$

Przypuśćmy, że dane są już $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ oraz $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$, dla których spełniony jest warunek (6). Wtedy istnieje n_{k+1}, takie że

$$\sum_{1 \leqslant j < p_k} |x_{n_{k+1}}(j)| < \frac{1}{3},$$

bo ciąg (x_n) dąży punktowo do zera. Następnie tak dobieramy p_{k+1}, by spełniony był warunek (6).

Niech teraz $a(j) = \operatorname{sgn}(x_{n_k}(j))$ dla $p_k \leqslant j < p_{k+1}$. Z naszej konstrukcji wynika, że

$$|< x_{n_k}, a >| \geqslant \sum_{p_k \leqslant j < p_{k+1}} |x_{n_k}(j)| - \sum_{j \notin [p_k, p_{k+1})} |x_{n_k}(j)| \geqslant 2/3 - 1/3 = 1/3,$$

co kłóci się ze słabą zbieżnością ciągu x_{n_k} do zera. □

Tę ciekawą własność przestrzeni l^1 nazywamy *własnością Schura.* Zauważmy, że ośrodkowa przestrzeń HIlberta nie ma tej własności, gdyż nieskończony ciąg ON (x_n) jest zbieżny słabo do zera i bynajmniej nie jest zbieżny w normie, bo $\|x_n - x_m\|^2 = 2$, jeśli tylko $n \neq m$. Oczywiście

7. *Jeśli przestrzeń Banacha ma własność Schura, to ma ją każda jej domknięta podprzestrzeń.*

Zatem

8. *Przestrzeń l^1 nie zawiera domkniętej podprzestrzeni izomorficznej z nieskończenie wymiarową przestrzenią Hilberta.*

A oto i cel naszych rozważań. Przypomnijmy najpierw, że każda ośrodkowa przestrzeń Banacha jest ciągłym obrazem liniowym przestrzeni l^1.

9. *Niech $T : l^1 \to H$ będzie ciągłym epimorfizmem na ośrodkową przestrzeń Hilberta H. Wtedy podprzestrzeń*

$$X = \ker T$$

nie ma w l^1 domkniętej podprzestrzeni dopełniającej.

Dowód. Gdyby X miała domknięte dopełnienie algebraiczne Y w l^1, to na mocy (3) podprzestrzeń Y byłaby izomorficzna z przestrzenią Hilberta, co ze względu na (8) jest niemożliwe..

□