**Słabe zbieżności w przestrzeniach Banacha**

1. **Twierdzenie (Schur).** *Jeśli ciąg $f_n \in l^1$ jest zbieżny słabo, to jest także zbieżny w normie.*

*Dowód.* Przypuśćmy nie wprost, że istnieje ciąg $\|f_n\| = 1$ zbieżny słabo do 0. Wtedy dla każdego $N$ istnieje $M > N$ oraz $n_N$ takie że

$$\sum_{j=N}^{M} |f_{n_N}(j)| \geqslant 2/3.$$

Przez indukcję znajdujemy podciąg $(f_{n_k})$ i rosnący ciąg liczbowy $N_k$, takie że

$$\sum_{j=N_k+1}^{N_{k+1}} |f_{n_k}(j)| \geqslant 2/3.$$

Jeśli teraz

$$\varphi(j) = \operatorname{sgn} f_{n_k}(j), \qquad N_k < j \leqslant N_{k+1},$$

to $\varphi \in l^\infty$ i dla każdego $k$,

$$| < f_{n_k}, \varphi > | \geqslant \sum_{j \in (N_k, N_{k+1}]} |f_{n_k}(j)| - \sum_{j \notin (N_k, N_{k+1}]} |f_{n_k}(j)| \geqslant 1/3,$$

co przeczy założeniu. □

2. **Lemat.** *Niech $X$ będzie przestrzenią metryczną. Ciąg $(x_n)$ jest fundamentalny, wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego ciągu liczb naturalnych $(k_n)$*

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{dist}(x_{n+k_n}, x_n) = 0.$$

3. **Lemat.** *Przestrzeń $l^1$ jest ciągowo słabo zupełna.*

*Dowód.* Niech $(f_n)$ będzie ciągiem elementów $l^1$ fundamentalnym w topologii słabej. Na mocy Lematu 2 dla każdego ciągu $k_n$ ciąg $f_{n+k_n} - f_n$ zbiega słabo do zera. Własność Schura pociąga, że również w normie. Stosując jeszcze raz Lemat 2, wnosimy że ciąg $(f_n)$ jest fundamentalny w normie, a zatem zbieżny w $l^1$ w normie i słabo. □

4. **Wniosek (Vitali-Hahn-Saks).** *Niech $\mathcal{M}$ będzie $\sigma$-ciałem podzbiorów $\Omega$, a $(\nu_n)$ ciągiem miar znakowanych, takim że dla każdej funkcji mierzalnej i ograniczonej istnieje granica*

$$\nu(f) = \lim \nu_n(f).$$

*Tak zdefiniowana funkcja zbioru $\nu$ jest miarą znakowaną.*

*Dowód.* Pokażemy, że $\nu$ jest przeliczalnie addytywna. Niech

$$A = \cup_k A_k,$$

gdzie $A_k$ są mierzalne i parami rozłączne. Definiujemy elementy $a_n \in l^1$ wzorem

$$a_n(k) = \nu_n(A_k).$$

Ciąg $a_n$ jest słabo fundamentalny w $l^1$, co łatwo wynika z założenia. Na mocy Lematu 3 ma słabą granicę $a \in l^1$. Zauważmy, że z definicji

$$a(k) = \nu(A_k).$$

W takim razie

$$(5)\qquad \begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \nu(A_k) &=< a, 1 >= \lim_{n\to\infty} < a_n, 1 > \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \nu_n(A_k) = \lim_{n\to\infty} \nu_n(\cup_{k=1}^{\infty} A_k) \\ &= \nu(\cup_{k=1}^{\infty} A_k) = \nu(A), \end{aligned}$$

co było naszym celem. □

6. **Twierdzenie.** *Niech $X$ będzie przestrzenią unormowaną. Kula jednostkowa $B^\star \subset X^\star$ jest *-słabo metryzowalna, wtedy i tylko wtedy gdy $X$ jest ośrodkowa.*

*Dowód.* Niech $X$ będzie ośrodkowa. Niech $x_n$ będzie gęstym przeliczalnym podzbiorem kuli jednostkowej w $X$. Wzór

$$\rho(f, g) = \sum_n 2^{-n} |f(x_n) - g(x_n)|, \qquad f, g \in X^\star,$$

definiuje wtedy odległość, która metryzuje *-słabą topologię. Rzeczywiście, jeśli dana jest liczba $\alpha$ i wektor $\|x\| \leqslant 1$, to dla $\|x_n - x\| < \alpha/2$

$$\{f \in B^\star : \rho(f, 0) < 2^{-n-1}\alpha\} \subset \{f \in B^\star : |f(x)| < \alpha\}.$$

Niech teraz $B^\star$ będzie *-slabo metryzowalna, a więc – jako zwarta – ośrodkowa w słabej topologii. Wtedy przestrzeń funkcji ciągłych ze zbieżnością jednostajną na $B^\star$ jest ośrodkowa, więc kula $B \subset C(B^\star)$ jest też taka. Stąd $X$ jest ośrodkowa. □

7. **Wniosek.** *Niech $X$ będzie przestrzenią unormowaną. Kula jednostkowa $B \subset X$ jest słabo metryzowalna, wtedy i tylko wtedy gdy $X^\star$ jest ośrodkowa.*

*Dowód.* Kula jednostkowa w $X$ jest *-słabo gęstą podprzestrzenią topologiczną $X^{\star\star}$, a więc jej słaba metryzowalność jest równoważna $^\star$-słabej metryzowalności kuli jednostkowej w $X^{\star\star}$. □