TEORIA SPEKTRALNA OGRANICZONYCH OPERATORÓW NORMALNYCH

1. Spektralny rozkład jedności

Spektralnym rozkładem jedności w przestrzeni Hilberta H nazywamy odwzorowanie, które każdemu zbiorowi borelowskiemu $M \subset \boldsymbol{C}$ przyporządkowuje projektor ortogonalny $E(M)$ w H, w taki sposób że

$$E(\emptyset) = 0, \quad E(\boldsymbol{C}) = I, \tag{1.1}$$

$$E(M \cap N) = E(M)E(N) \text{ dla borelowskich } M, N \subset \boldsymbol{C}, \tag{1.2}$$

$$E\big(\bigcup M_k\big) = \sum E(M_k) \text{ w mocnym sensie,} \tag{1.3}$$

jeśli zbiory M_k są parami rozłączne. Zwróćmy uwagę, że ostatni warunek równoważny jest następującemu:

$$M_k \searrow \emptyset \implies E(M_k) \to 0 \text{ w mocnym sensie.} \tag{1.4}$$

Projektory $E(M)$ będziemy też nazywali *projektorami spektralnymi.* Zbiór

$$\operatorname{supp} E = \bigcap_{E(M)=I} \overline{M}$$

nazywamy *nośnikiem* rozkładu spektralnego. Nośnik jest więc najmniejszym domkniętym podzbiorem $K \subset \boldsymbol{C}$, takim że $E(\boldsymbol{C} \setminus K) = 0$.

1.5. *Niech E będzie spektralnym rozkładem jedności w przestrzeni Hilberta H. Wtedy dla każdych $x, y \in H$*

$$\mu_{x,y}(M) =< E(M)x, y >, \qquad \|\mu_{x,y}\| \leqslant \|x\|\|y\|, \tag{1.6}$$

jest miarą zespoloną. Jeśli $\mu_x = \mu_{x,x}$, to $\|\mu_x\| = \|x\|^2$.

1.7. *Dla każdych $x, y, z \in H$ i każdego $\alpha \in \boldsymbol{C}$,*

$$\mu_{\alpha x+y,z} = \alpha\mu_{x,z} + \mu_{y,z} \tag{1.8}$$

Ponadto, dla każdej funkcji $F \in \mathcal{B}^\infty(C)$

$$\overline{\int F(t)\mu_{x,y}(dt)} = \int \overline{F(t)}\mu_{y,x}(dt). \tag{1.9}$$

Rodzinę miar $\mu_{x,y}$ spełniających (1.8) i (1.9) będziemy nazywali *rodziną miar spektralnych.*

1.10. *Mamy*

$$|\mu_{x,y}(M)| \leqslant \|y\|(\mu_x(M))^{1/2}$$

oraz

$$\operatorname{supp} E = \overline{\bigcup_{x,y \in H} \operatorname{supp} \mu_{x,y}} = \overline{\bigcup_{x \in H} \operatorname{supp} \mu_x}.$$

Algebrę ograniczonych funkcji borelowskich na $\boldsymbol{C}$ będziemy oznaczać przez $\mathcal{B}^\infty(\boldsymbol{C})$.

1.11. *Dla każdego zbioru borelowskiego M i każdych $x, y \in H$*

$$d\mu_{E(M)x,y} = \chi_M d\mu_{x,y}.$$

Za pomocą rodziny miar spektralnych definiujemy dla każdej funkcji $F \in \mathcal{B}^\infty(\boldsymbol{C})$ operator

$$< \operatorname{Op}(F)x, y >= \int F(\lambda)\, \mu_{x,y}(d\lambda),$$

który będziemy też oznaczać przez

$$\operatorname{Op}(F) = \int F(\lambda)\, E(d\lambda).$$

Wprost z definicji wynika, że

$$\| \operatorname{Op}(F)\| \leqslant \|F\|_\infty.$$

Będziemy mówili, że ciąg $F_n \in \mathcal{B}^\infty(\boldsymbol{C})$ jest zbieżny do F w sposób *ograniczony*, jeśli ma miejsce zbieżność punktowa i wszystkie funkcje w ciągu są wspólnie ograniczone.

1.12. *Jeśli ciąg funkcji $F_n \in \mathcal{B}^\infty(\boldsymbol{C})$ jest zbieżny w sposób ograniczony, to ciąg operatorów A_{F_n} jest zbieżny słabo operatorowo.*

1.13. Lemat. *Niech $F, G \in C(\boldsymbol{C})$ będą borelowskie i ograniczone. Wtedy*

$$\operatorname{Op}(FG) = \operatorname{Op}(F)\operatorname{Op}(G). \qquad \operatorname{Op}(F)^\star = \operatorname{Op}(\bar{F}).$$

W szczególności, operator $\operatorname{Op}(F)$ *jest normalny.*

Dowód. Przyjmijmy najpierw, że $F = \chi_M$, gdzie $M \subset \boldsymbol{C}$ jest zbiorem borelowskim. Wtedy

$$\begin{aligned}
< \operatorname{Op}(F)\operatorname{Op}(G)x, y >&=< E(M)\operatorname{Op}(G)x, y > \\
&=< \operatorname{Op}(G)x, E(M)y >= \int G(\lambda)\mu_{x,E(M)y}(d\lambda) \\
&= \int (\chi_M G)(\lambda)\mu_{x,y}(d\lambda) =< \operatorname{Op}(FG)x, y >,
\end{aligned}$$

bo $\mu_{x,E(M)y} = \chi_M \mu_{x,y}$. Stąd natychmiast wynika, że wzór obowiązuje dla funkcji prostych F, a przez przejście graniczne dla dowolnych $F \in \mathcal{B}^\infty(\boldsymbol{C})$. Druga część tezy wynika wprost z (1.9). □

1.14. Wniosek. *Niech ciąg $F_n \in \mathcal{B}^\infty(\boldsymbol{C})$ będzie zbieżny w sposób ograniczony do funkcji F. Wtedy*

$$\operatorname{Op}(F_n)x \to \operatorname{Op}(F)x, \qquad x \in H,$$

a więc zbieżność jest w istocie mocna.

Dowód. Możemy przyjąć, że $F = 0$. Wtedy

$$\begin{aligned}
\| \operatorname{Op}(F)x\|^2 &=< \operatorname{Op}(F)^\star \operatorname{Op}(F)x, x > \\
&=< |F_n|^2(A)x, x >= \int |F_n|^2(\lambda)\mu_x(d\lambda) \to 0,
\end{aligned}$$

bo wcześniej pokazaliśmy, że zbieżność jest słaba. □

1.15. Wniosek. *Istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość pomiędzy spektralnymi rozkladami jedności o ograniczonym nośniku w przestrzeni Hilberta H a rodzinami miar spektralnych o wspólnie ograniczonym nośniku.*

Dowód. Widzieliśmy, że spektralny rozkład jedności wyznacza rodzinę miar spektralnych. Niech teraz $\{\mu_{x,y}\}$ będzie taką rodziną. Niech

$$E(M) = \mathrm{Op}(\chi_M)$$

dla borelowskiego $M \subset \boldsymbol{C}$. Widać, że $E(M)$ jest projektorem ortogonalnym. Addytywność i multiplikatywność są łatwe do sprawdzenia. Pokażemy, że również warunek ciągłości jest spełniony.

Niech więc $M_k \searrow \emptyset$ i niech $F_k = \chi_{M_k}$. Wtedy

$$\|E(M_k)x\|^2 =< E(M_k)x, x >= \int_{M_k} d\mu_x \to 0,$$

bo $\mu_x = \mu_{x,x}$ jest miarą. Zatem $M \to E(M)$ jest spektralnym rozkładem jedności. □

2. Twierdzenie spektralne

Przypomnijmy elementarne fakty teorii spektralnej.

2.1. *Niech T będzie ograniczonym operatorem na przestrzeni Banacha X, a P wielomianem nad $\boldsymbol{C}$. Wtedy*

$$\sigma(P(T)) = P(\sigma(T)).$$

Dowód. Niech P będzie unormowanym wielomianem stopnia n. Niech

$$\{\lambda_j : 1 \leqslant j \leqslant n\} = P^{-1}(\{\mu\}).$$

Wtedy

$$\mu - P(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda) \dots (\lambda_n - \lambda),$$

a więc także

$$\mu - P(T) = (\lambda_1 - T) \dots (\lambda_n - T).$$

Operator $\mu - P(T)$ jest odwracalny, wtedy i tylko wtedy gdy któryś z operatorów $\lambda_j - T$ jest odwracalny. Widać stąd, że

$$\mu \in \sigma(P(T)) \iff P^{-1}(\{\mu\} \cap \sigma(T) \neq \emptyset \iff \mu \in P(\sigma(T)).$$

□

2.2. *Jeśli T jest normalnym operatorem ograniczonym na przestrzeni Hilberta, a P wielomianem, to*

$$\|P(T)\| = \sup\{|P(\lambda)| : \lambda \in \sigma(T)\}.$$

Dowód. Przypomnijmy, że dla każdego $T \in \mathcal{L}(H)$

$$r(T) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}$$

oraz, jeżeli T jest normalny,

$$r(T).\|T\|$$

W takim razie na mocy (2.1),

$$\|P(T)\| = r(P(T)) = \sup\{|\mu| : \mu \in \sigma(P(T))\} = \sup\{|P(\lambda)| : \lambda \in \sigma(T)\},$$

bo $P(T)$ jest normalny, jeżeli T jest normalny. □

A oto i twierdzenie spektralne.

2.3. Twierdzenie. *Niech $A \in \mathcal{B}(H)$ będzie normalny. Istnieje dokładnie jeden spektralny rozkład jedności na H o nośniku ograniczonym, taki że*

$$A = \int \lambda E(d\lambda).$$

Ponadto $\operatorname{supp} E = \sigma(A)$.

Dowód. Na mocy (2.2) dla każdego wielomianu P mamy

$$\|P(A)\| = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |P(\lambda)|.$$

Ponadto $A^\star A = AA^\star$, co pozwala łatwo określić *-homomorfizm algebr

$$C(\sigma(A)) \ni f \to f(A) \in \mathcal{B}(H),$$

który jest izometrią na pewną domkniętą podalgebrę $\mathcal{B}(H)$. Zauważmy następnie, że dla każdych $x, y \in H$ funkcjonał liniowy

$$C(\sigma(A)) \ni f \to < f(A)x, y >$$

jest ciągły, więc na mocy twierdzenia Riesza istnieje miara zespolona $\mu_{x,y}$ o normie $\leqslant \|x\|\|y\|$, taka że

$$< f(A)x, y > = \int f(\lambda) \mu_{x,y}(d\lambda). \tag{2.4}$$

Dla każdych $x, y \in H$ jest $\operatorname{supp} \mu_{x,y} \subset \sigma(A)$, a z drugiej strony dla każdego $\lambda_0 \in \sigma(A)$ i każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $x \in H$, taki że

$$\mu_x(B_\varepsilon(\lambda_0)) > 0,$$

więc

$$\sigma(A) = \overline{\bigcup_{x \in H} \operatorname{supp} \mu_x}. \tag{2.5}$$

Ponadto, jak nietrudno zauważyć, miary $\mu_{x,y}$ spełniają warunki (1.8) i (1.9). Zatem $\{\mu_{x,y}\}$ jest rodziną miar spektralnych i wyznacza spektralny rozkład jednośći E, taki że dla ustalonego zbioru borelowskiego $M \subset \boldsymbol{C}$

$$E(M) = \mathrm{Op}(\chi_M) = \chi_M(A).$$

Z (2.5) i (1.10) wynika, że $\operatorname{supp} E = \sigma(A)$. Pozostaje już tylko zauważyć, że

$$< Ax, y > = \int \lambda \mu_{x,y}(d\lambda)$$

na mocy definicji $\mu_{x,y}$.

Wykażemy jeszcze jedyność spektralnego rozkładu jedności. Niech E_1 będzie rozkładem jedności o ograniczonym nośniku, takim że

$$A = \int \lambda E_1(d\lambda).$$

(Zauważmy, że tylko z powodu ograniczoności nośnika możemy funkcję $f(\lambda) = \lambda$ uważać za ograniczoną.) Stosując Lemat 1.13, przez indukcję otrzymujemy

$$< P(A)x, y > = \int P(\lambda) < E_1(d\lambda)x, y >$$

dla każdego wielomianu P, a więc i dla każdej funkcji ciągłej. To zaś oznacza, że

$$< E_1(M)x, y > = < E(M)x, y >$$

dla każdego borelowskiego M, a więc $E_1 = E$. □

2.6. Wniosek. *Istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość pomiędzy spektralnymi rozkladami jedności o ograniczonym nośniku w przestrzeni Hilberta H a ograniczonymi operatorami normalnymi na tejże przestrzeni.*

2.7. Wniosek. *Niech A będzie operatorem normalnym na przestrzeni Hilberta. Istnieje dokładnie jeden *-homomorfizm algebry*

$$\mathcal{B}^\infty(\sigma(A)) \ni F \to F(A) \in \mathcal{L}(H),$$

przez który funkcja $f(\lambda) = \lambda$ przechodzi na A, a ponadto $F_n(A) \to F(A)$ mocno, jeśli $F_n \to F$ w sposób ograniczony.

3. Wnioski i przykłady

Zacznijmy od przykładu.

3.1. Przykład. Niech $K \subset \boldsymbol{C}$ będzie zwarty. Jak wiemy, operator

$$Af(t) = tf(t), \qquad f \in H = L^2(K),$$

jest operatorem normalnym, a jego spektrum to $\sigma(A) = K$. Niech

$$E(M) = T_{\mathbf{1}_{M\cap K}}, \qquad M \in \mathcal{B}(\boldsymbol{C}).$$

Nietrudno się przekonać, że E jest spektralnym rozkładem jedności na H. Miarą spektralną wyznaczoną przez wektor $f \in H$ jest

$$\mu(M) = \int_{K\cap M} |f(t)|^2\, dt.$$

Mamy też

$$A = \int_K \lambda E(d\lambda).$$

3.2. Wniosek. *Liczba λ_0 leży w spektrum operatora normalnego, wtedy i tylko wtedy gdy $E(B(\lambda_0, \varepsilon)) \neq 0$ dla każdego $\varepsilon > 0$.*

3.3. Wniosek. *Liczba λ_0 jest wartością własną operatora normalnego A, wtedy i tylko wtedy gdy $E(\{\lambda_0\}) \neq 0$.*

Dowód. Wystarczy rozpatrzyć przypadek $\lambda_0 = 0$. Jeśli $E(\{0\}) \neq 0$, to dla pewnego wektora $x_0 \in H$ o długości 1 mamy $E(\{0\})x_0 = x_0$. Zatem

$$< Ax_0, x_0 >= \int_{\{0\}} \lambda \mu_{x_0}(d\lambda) = 0, \tag{3.4}$$

a więc $Ax_0 = 0$.

Z drugiej strony, jeśli $Ax_0 = 0$ dla pewnego $\|x_0\| = 1$, to

$$\int_{\sigma(A)} \lambda \mu_{x_0}(d\lambda) = 0,$$

a więc także

$$\int_{\sigma(A)} P(\lambda)\mu_{x_0}(d\lambda) = 0$$

dla każdego wielomianu P o zerowym wyrazie wolnym. Wiemy jednak, że μ_{x_0} jest miarą probabilistyczną. Stąd $\mu_{x_0} = \delta_0$ i wobec tego $E(\{0\})x_0 = x_0$. □

3.5. Wniosek. *Niech A będzie operatorem normalnym na przestrzeni Hilberta H. Wówczas dla każdej funkcji ciągłej f*

$$\sigma(f(A)) = f(\sigma(A)).$$

Dowód. Wystarczy sprawdzić, że $f(A)$ jest odwracalny, wtedy i tylko wtedy gdy $0 \notin f(\sigma(A))$. Jest jasne, że jeśli $0 \notin f(\sigma(A))$, to dla $g = 1/f$ jest $f(A)g(A) = I$, a więc $f(A)$ jest odwracalny.

Przypuśćmy teraz, że $f(\lambda_0) = 0$ dla pewnego $\lambda_0 \in \sigma(A)$. Niech $M_n = B(\lambda_0, 1/n)$. Jako że $\lambda_0 \in \sigma(A)$, $E(M_n)$ jest niezerowym projektorem, więc istnieje $\|x_n\| = 1$, taki że $E(M_n)x_n = x_n$. Zauważmy jednak, że

$$\|f(A)x_n\| = \|\mathbf{1}_{M_n}(A)f(A)x_n\| \leqslant \|\mathbf{1}_{M_n}f\| \to 0,$$

więc $f(A)$ nie może być odwracalny. □

Powyższy wniosek zilustrujemy prostym, lecz ciekawym przykładem.

3.6. Przykład. Jeśli $A \geqslant 0$, to

$$A^{1/2} = \int_{\sigma(A)} \sqrt{\lambda}\, E(d\lambda).$$

Zatem jeśli A jest normalny, to

$$A^\star A = \int_{\sigma(A)} |\lambda|^2 E(d\lambda), \qquad |A| = \int_{\sigma(A)} |\lambda| E(d\lambda).$$

Stąd też

$$\sigma(|A|) = \{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Niech jeszcze $F(z) = \operatorname{sign}(z)$. Wtedy $U = F(A)$ jest częściową izometrią oraz $A = U|A|$ jest rozkładem biegunowym.

3.7. *Uwaga.* Zwróćmy uwagę, że dla każdego borelowskiego $M \subset \sigma(A)$ przestrzeń $E(M)(H)$ jest podprzestrzenią niezmienniczą operatora normalnego A. Tak więc operatory normalne cieszą się obfitością podprzestrzeni niezmienniczych.

3.8 (**Kryterium Weyla).** *Liczba λ_0 leży w spektrum operatora A, wtedy i tylko wtedy gdy istnieje ciąg unormowanych wektorów $x_n \in H$, taki że*

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_0 x_n - A x_n = 0. \tag{3.9}$$

Dowód. Jeśli λ_0 nie leży w spektrum A, to dla każdego ciągu (x_n) spełniającego (3.9)

$$\|x_n\| = \|(\lambda_0 I - A)^{-1}(\lambda_0 I - A)x_n\| \leqslant C\|(\lambda_0 I - A)x_n\| \to 0,$$

co przeczy $\|x_n\| = 1$.

Niech teraz $\lambda_0 \in \sigma(A)$. Dla każdego n istnieje wektor x_n długości 1, taki że $E(M_n)x_n = x_n$, gdzie $M_n = B(\lambda_0, +1/n)$. Wtedy

$$\lambda_0 x_n - A x_n = \int (\lambda_0 - \lambda) E(d\lambda)x_n = \int_{M_n} (\lambda_0 - \lambda) E(d\lambda)x_n,$$

skąd

$$\|\lambda_0 x_n - A x_n\| \leqslant \frac{1}{n}\|E(M_n)\| = \frac{1}{n},$$

tak jak chcieliśmy. □

3.10. *Uwaga.* Powyższy wniosek często formułuje się tak: Spektrum operatora normalnego składa się z *aproksymatywnych wartości własnych.*

Mówimy, że wektor $x_0 \in H$ jest *wektorem cyklicznym* operatora A, jeśli

$$\overline{< A^n x_0 : n \in \boldsymbol{N} >} = H.$$

W Przykładzie 3.1 wektorem cyklicznym jest funkcja $\mathbf{1}_K$.

3.11. Wniosek. *Jeśli operator normalny $A \in \mathcal{B}(H)$ ma wektor cykliczny $x_0 \in H$, to istnieje izometria*

$$U : L^2(\sigma(A), \mu) \to H,$$

gdzie $\mu = \mu_{x_0}$, taka że

$$U^{-1}AUf(\lambda) = \lambda f(\lambda), \qquad f \in L^2(\sigma(A), \mu).$$

Dowód. Definiujemy U na gęstej podprzestrzeni $\mathcal{B}^\infty(\sigma(A))$ wzorem $Uf = f(A)x_0$. Obraz U jest gęsty. Mamy też

$$< Uf, Ug >=< f(A)x_0, g(A)x_0 >= \int f(\lambda)\overline{g(\lambda)}d\mu(\lambda) =< f, g >,$$

co pokazuje, że U jest odwzorowaniem unitarnym na H. Ponadto,

$$< U^{-1}AUf, g >=< AUf, Ug >=< Af(A)x_0, g(A)x_0 >= \int \lambda f(\lambda)\overline{g(\lambda)}\mu(d\lambda),$$

skąd wynika reszta tezy. □

Mówimy, że operator A na przestrzeni Hilberta ma *proste spektrum*, jeśli jest unitarnie równoważny operatorowi postaci $f \to \lambda f$ na $L^2(M, \mu)$ dla pewnej miary skończonej μ na przestrzeni zwartej $M \subset \boldsymbol{C}$. Zatem

3.12. Wniosek. *Operator normalny ma proste spektrum, wtedy i tylko wtedy gdy ma wektor cykliczny.*

Rozważmy jeszcze przykład.

3.13. Przykład. Niech $H = L^2(-\pi/2, \pi/2)$ i niech

$$Af(t) = \cos t \cdot f(t), \qquad f \in H.$$

Mamy więc $\sigma(A) = [0, 1]$.

A nie ma wektora cyklicznego. Przypuśćmy bowiem nie wprost, że f jest takim wektorem. Oczywiście $f(t) \neq 0$ p.w. Niech $g(t) = f(t)$ dla $x \in (0, \pi]$ i $g(t) = f(-t)$ dla $x \in [-\pi, 0]$. Jeśli P_n jest takim ciągiem wielomianów, że $\varphi_n f \to g$, gdzie $\varphi_n(t) = P_n(\cos t)$, to istnieje podciąg φ_{n_k} zbieżny p.w. do 1, skąd wynika, że f jest funkcją parzystą i nie może być wektorem cyklicznym.

Jeśli ustalimy izomorfizm unitarny

$$L^2(-\pi/2, \pi/2) \ni f \to (f_1, f_2) \in L^2(0, \pi/2) \oplus L^2(0, \pi/2)$$

wzorem $f_1(t) = f(-t)$, $f_2(t) = f(t)$, to otrzymamy unitarnie równoważny operator

$$A(f_1, f_2) = (\cos t \cdot f_1(t), \cos t \cdot f_2(t)), \qquad (f_1, f_2) \in L^2(0, \pi) \oplus L^2(0, \pi).$$

Używamy tej samej litery A na oznaczenie innej realizacji tego samego operatora, by nie komplikować niepotrzebnie zapisu.

Na każdym ze składników $L^2(0, \pi/2)$ operator ma proste spektrum. Aby to zobaczyć, wprowadźmy miarę na $[0, 1]$:

$$dm(\lambda) = \frac{d\lambda}{\sqrt{1 - \lambda^2}}.$$

Niech $Uf(\lambda) = f(\arccos \lambda)$. Nietrudno sprawdzić, że

$$U : L^2([0, \pi/2], dt) \to L^2([0, 1], dm)$$

jest przekształceniem unitarnym oraz

$$UAU^{-1}g(\lambda) = \lambda g(\lambda).$$