

Spektrum wielomianu od operatora

1. Niech T będzie ograniczonym operatorem na przestrzeni Banacha X , a P wielomianem nad \mathbf{C} . Wtedy

$$\sigma(P(T)) = P(\sigma(T)).$$

Dowód. Niech P będzie unormowanym wielomianem stopnia n . Niech

$$\{\lambda_j : 1 \leq j \leq n\} = P^{-1}(\{\mu\}).$$

Wtedy

$$\mu - P(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda) \dots (\lambda_n - \lambda),$$

a więc także

$$\mu - P(T) = (\lambda_1 - T) \dots (\lambda_n - T).$$

Operator $\mu - P(T)$ jest odwracalny, wtedy i tylko wtedy gdy któryś z operatorów $\lambda_j - T$ jest odwracalny. Widać stąd, że

$$\mu \in \sigma(P(T)) \iff P^{-1}(\{\mu\}) \cap \sigma(T) \neq \emptyset \iff \mu \in P(\sigma(T)).$$

□