Operatory śladowe

Niech H będzie ośrodkową przestrzenią Hilberta.

0.1. Lemma. *Każdy operator $A \in \mathcal{B}$ można przedstawić w postaci*

$$A = A_1 + iA_2, \tag{0.2}$$

gdzie

$$A_1 = \frac{1}{2}(A + A^\star), \quad A_2 = \frac{1}{2i}(A - A^\star)$$

są hermitowskie.

Mówimy, że operator $A \in \mathcal{B}(H)$ jest *śladowy*, jeśli dla dowolnych układów ON

$$\sum_n | < A\varphi_n, \psi_n > | < \infty.$$

0.3. *Operator A jest śladowy, wtedy i tylko wtedy gdy operator $|A|$ jest śladowy.*

Dowód. Wystarczy zauważyć, że $A = U|A|$ i $|A| = U^\star A$, gdzie U jest częściową izometrią. □

0.4. *Operator A jest śladowy, wtedy i tylko wtedy gdy $|A|^{1/2}$ jest Hilberta-Schmidta. Stąd też operator śladowy jest zwarty.*

Dowód. Rzeczywiście

$$\sum_n < |A|\varphi_n, \varphi_n > | = \sum_n \||A|^{1/2}\varphi_n\|^2.$$

□

0.5. *Operator zwarty A o liczbach singularnych μ_n jest śladowy, wtedy i tylko wtedy gdy*

$$\sum_n \mu_n < \infty.$$

Wtedy też

$$\sum_n | < A\varphi_n, \psi_n > | \leqslant \sum_n \mu_n$$

dla każdych układów ON. Co więcej, suma

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_n < A\varphi_n, \varphi_n > \tag{0.6}$$

nie zależy od wyboru układu ONZ.

Dowód. Niech $\{e_n\}$ będzie układem ONZ wektorów własnych $|A|$. Wtedy

$$\begin{aligned}
&\sum_n | < A\varphi_n, \psi_n > | \\
&\quad = \sum_n | < |A|\varphi_n, U^\star\psi_n > | \leqslant \sum_n \sum_k \mu_k | < \varphi_n, e_k > \overline{< U^\star\psi_n, e_k >}| \\
&\quad \leqslant \sum_k \mu_k \sum_n | < \varphi_n, e_k > \overline{< U^\star\psi_n, e_k >}| \leqslant \sum_k \mu_k.
\end{aligned}$$

Niech teraz $\{e_n\}$ bedzie bazą wektorów własnych $|A|$. Wtedy dla dowolnego układu ON

$$\sum_k < A\varphi_k, \varphi_k >= \sum_k < |A|\varphi_k, U^\star \varphi_k >= \sum_k \sum_n < |A|\varphi_k, e_n > \overline{< U^\star \varphi_k, e_n >},$$

a po zmianie kolejności sumowania

$$\begin{aligned} \sum_k < A\varphi_k, \varphi_k > &= \sum_n \sum_k < Ue_n, \varphi_k > \overline{< |A|e_n, \varphi_k >} \\ &= \sum_n < Ue_n, |A|e_n >= \sum_n < Ae_n, e_n > \end{aligned}$$

Zmiana kolejności sumowania jest dozwolona, bo już wyżej pokazaliśmy, że

$$\sum_n \sum_k | < Ue_n, \varphi_k >< |A|e_n, \varphi_k > | \leqslant \sum_k \mu_k.$$

□

Dla śladowego operatora A definiujemy *ślad* wzorem (0.6). W szczególności

0.7. *Jeśli A jest śladowy i hermitowski, a $\{\lambda_n\}$ jest ciągiem jego wartości własnych, to*

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_n \lambda_n.$$

Twierdzenie Lidskiego mówi, że powyższy fakt pozostaje w mocy dla dowolnego operatora śladowego, ale jego dowód w ogólnym przypadku jest bardzo trudny. Zainteresowanych odsyłamy do drugiego tomu monografii Dunforda-Schwartza. Twierdzenie to nazywa się czasem twierdzeniem o równości śladu macierzowego (lewa strona) i śladu spektralnego (prawa strona).

Normę śladową operatora śladowego definiujemy wzorem

$$\|A\|_1 = \mathrm{Tr}|A| = \sum_n \mu_n.$$

0.8. *Funkcja $A \to \|A\|_1$ jest normą na przestrzeni liniowej operatorów śladowych.*

Dowód. Niech $A+B = W|A+B|$, gdzie W jest częściową izometrią. Wtedy dla dowolnego układu ONZ

$$\begin{aligned} \|A+B\|_1 &= \sum_n < |A+B|\varphi_n, \varphi_n > && (0.9) \\ &= \sum_n < A\varphi_n, W\varphi_n > + \sum_n < B\varphi_n, W\varphi_n > && (0.10) \\ &\leqslant \sum_n \mu_n + \sum_n \nu_n = \|A\|_1 + \|B\|_1. && (0.11) \end{aligned}$$

gdzie μ_n oraz ν_n są odpowiednio singularnymi liczbami operatów A i B. □

0.12. *Operator A jest śladowy, wtedy i tylko wtedy gdy istnieje układ ONZ, taki że*

$$\sum_n \|A\varphi_n\| < \infty. \tag{0.13}$$

Dowód. Ta własność wynika z powyższych własności i faktu, że

$$\|Ax\| = \||A|x\|, \qquad x \in H.$$

$\square$

Tym niemniej

0.14. *Niech A będzie nieskończenie wymiarowym operatorem śladowym. Wtedy istnieje układ ON, taki że*

$$\sum_k \|A\varphi_k\| = \infty.$$

Dowód. Wystarczy pokazać, że dla każdego n istnieje m i skończony układ ON, takie że

$$\sum_{k=n}^{n+m} \|A\varphi_k\| \geqslant 1.$$

Niech $\{e_k\}$ będzie układem ON wektorów własnych A odpowiadających niezerowym wartościom własnym λ_k, których jest nieskończenie wiele. Przyjmijmy, że $|\lambda_k| \geqslant \lambda_{k+1}| > 0$ dla wszystkich $k \in \boldsymbol{N}$. Dla ustalonego n niech $m > |\lambda_n|^{-2}$. W przestrzeni $m+1$-wymiarowej $V = \operatorname{lin}\{e_n, e_{n+1}, \dots, e_{n+m}\}$ rozważmy operator unitarny U, taki że

$$U\left(\frac{e_n + e_{n+1} + \dots e_{n+m}}{\sqrt{n}}\right) = e_n.$$

Niech

$$\varphi_k = Ue_k, \qquad n \leqslant k \leqslant n+m.$$

Wtedy $< \varphi_k, e_n >= \frac{1}{\sqrt{m}}$, a więc

$$\sum_{k=n}^{m+1} \|A\varphi_k\| = \sum_{k=n}^{n+m} \left(\sum_{j=n}^{n+m} |< A\varphi_k, e_j >|^2\right)^{1/2} \tag{0.15}$$

$$\geqslant \sum_{k=n}^{n+m} |< \varphi_k, Ae_n >| \geqslant \frac{m+1}{\sqrt{m}}|\lambda_n| \geqslant 1. \tag{0.16}$$

$\square$

0.17. *Remark.* Ostrzeżmy Czytelnika, że do tego, aby operator liniowy A był śladowy, nie wystarcza, aby

$$\sum_n |\langle A\varphi_n, \varphi_n\rangle| < \infty,$$

było spełnione dla jednego układu ONZ. Aby to zobaczyć rozpatrzmy operator

$$Sx = (0, x_1, 2x_1, 3x_2, \dots), \qquad x = (x_1, x_2, \dots) \in \mathbf{s_0} \subset l^2(\boldsymbol{N}_1).$$

Jeśli $\{e_n\}$ jest układem zero-jedynkowym, to dla każdego n mamy $< Se_n, e_n >= 0$, a operator S nie jest nawet ograniczony.

Przechodzimy teraz do ilustracji naszej teorii. Rozważymy operatory całkowe w $L^2([0,1])$. Zaczniemy od przykładu. Niech

$$Vf(x) = \int_0^x f(y)\, dy$$

będzie operatorem Volterry. Jak wiemy, jest to operator Hilberta-Schmidta, bo jego jądro

$$0 \leqslant a(x,y) = \chi_{[0,x]}(y) \leqslant 1$$

jest całkowalne z kwadratem. Nie jest to jednak operator śladowy, bo

$$< Ve_n, e_n >= \frac{1}{2\pi in},$$

gdzie $e_n(x) = e^{2\pi inx}$. Rzeczywiście,

$$Ve_n(x) = \int_0^x e^{2\pi iny}\,dy = \frac{1}{2\pi in}(e_n(x) - 1) \qquad n \neq 0,$$

Niech

$$Af(x) = \int_0^1 a(x,y)f(y)\,dy \tag{0.18}$$

będzie operatorem Hilberta-Schmidta na $L^2([0,1])$. Jak wiadomo, jest to równoważne warunkowi

$$\int_0^1\int_0^1 |a(x,y)|^2\,dxdy < \infty.$$

Przypomnijmy też, że jądro hermitowskiego operatora Hilberta-Schmidta o wektorach własnych

$$A\varphi_n = \lambda_n\varphi_n$$

przedstawia się zbieżnym w $L^2([0,1]^2)$ szeregiem

$$a(x,y) = \sum_n \lambda_n\varphi_n(x)\overline{\varphi_n(y)}.$$

0.19. *Jeśli jądro operatora (0.18) spełnia dodatkowo warunek*

$$\int_0^1\int_0^1 |\partial_y a(x,y)|^2\,dxdy < \infty,$$

to A jest operatorem śladowym.

Dowód. Całkując przez części, otrzymujemy

$$Af(x) = \int_0^1 a(x,y)f(y)\,dy = a(x,1)Vf(1)\big|_0^1 - \int_0^1 \partial_y a(x,y)Vf(y)\,dy,$$

skąd wnosimy, że $A = B - A'V$, gdzie

$$A'f(x) = \int_0^1 \partial_y a(x,y)\,dy$$

jest operatorem Hilberta-Schmidta, a

$$Bf(x) = a(x,1) < f, 1 >$$

operatorem jednowymiarowym. □

0.20. *Jeśli operator (0.18) ma ciągłe jądro i jest śladowy, to*

$$\mathrm{Tr}(A) = \int_0^1 a(x,x)\,dx.$$

Dowód. Przyjmijmy na razie, że A jest hermitowski. Niech φ_n będzie układem ONZ wektorów własnych A. Jako że A ma ciągłe jądro, funkcje φ_n są ciągłe. Dla $0 < \delta < 1$ jest

$$L(\delta) = \int_0^{1-\delta} \int_y^{y+\delta} a(x,y)\,dxdy \tag{0.21}$$

$$= \sum_n \lambda_n \int_0^{1-\delta} \int_y^{y+\delta} \varphi_n(x)\overline{\varphi_n(y)}\,dxdy = P(\delta). \tag{0.22}$$

Pokażemy, że

$$\lim_{\delta\to 0} \delta^{-1} L(\delta) = \int_0^1 a(x,x)\,dx$$

oraz

$$\lim_{\delta\to 0} \delta^{-1} P(\delta) = \lim_{\delta\to 0} \sum_n \lambda_n m_n(\delta) = \sum_n \lambda_n,$$

gdzie

$$m_n(\delta) = \delta^{-1} \int_0^{1-\delta} \int_y^{y+\delta} \varphi_n(x)\overline{\varphi_n(y)}\,dxdy.$$

co zakończy dowód dla $A^\star = A$.

Pierwsza równość wynika z faktu, że a jest funkcją jednostajnie ciągłą na kwadracie $[0,1]^2$. Istotnie, dla zadanego $\varepsilon > 0$ istnieje δ_0 i dostatecznie małych δ

$$|\delta^{-1} \int_0^{1-\delta} \int_y^{y+\delta} a(x,y)\,dxdy - \int_0^{1-\delta} a(x,x)\,dx| \tag{0.23}$$

$$\leqslant \int_0^{1-\delta} \delta^{-1} \int_y^{y+\delta} |a(x,y) - a(x,x)|\,dxdy \leqslant \varepsilon, \tag{0.24}$$

a więc także

$$\sum_n \lambda_n |m_n(\delta)| \leqslant \int_0^1 a(x,x)\,dx + \varepsilon, \tag{0.25}$$

Dowód drugiej zacznijmy od spostrzeżenia, że

$$|\lambda_n\varphi_n(x) - \lambda_n\varphi_n(y)| \leqslant \int_0^1 |a(x,t) - a(y,t)||\varphi_n(t)|\,dt,$$

co dzięki jednostajnej ciągłości a pokazuje, że funkcje $\lambda_n\varphi_n$ są jednakowo ciągłe. Zatem dla zadanego $\varepsilon > 0$ i dostatecznie małych $\delta > 0$

$$|\lambda_n m_n(\delta) - \lambda_n \int_0^{1-\delta} |\varphi_n(y)|^2\,dx| \tag{0.26}$$

$$\leqslant \int_0^1 |\varphi_n(y)| \delta^{-1} \int_y^{y+\delta} |\lambda_n\varphi_n(x) - \lambda_n\varphi_n(y)|\,dxdy \leqslant \varepsilon, \tag{0.27}$$

co pokazuje, że dla każdego n

$$\lim_{\delta\to 0} \lambda_n m_n(\delta) = \lambda_n,$$

a to razem z (0.25) wystarcza, by zakończyć dowód przypadku hermitowskiego.

W przypadku ogólnym wystarczy przedstawić operator A w postaci $A = A_1 + iA_2$, gdzie A_1 i A_2 są hermitowskie, i zastosować wcześniej otrzymany wynik. $\square$

0.28. Theorem (Mercer). *Niech*

$$Af(x) = \int_0^1 a(x,y)f(y)\,dy$$

będzie nieujemnym operatorem na $L^2([0,1])$ *z ciągłym jądrem* $a \in C([0,1]^2)$. *Niech* $\{e_n\}$ *będzie układem ONZ funkcji własnych* A *odpowiadających wartościom własnym* μ_n. *Wtedy*

$$a(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n e_n(x)\overline{e_n(y)} \tag{0.29}$$

według zbieżności jednostajnej. W szczególności

$$\int_0^1 a(x,x) = \sum_n \mu_n,$$

a więc A *jest śladowy.*

Dowód. Najpierw zauważmy, że gdyby $a(x,x) < 0$ dla pewnego $x \in [0,1]$, to istniałby zbiór $U \subset [0,1]$ miary dodatniej, taki że $a(x,y) < 0$ dla $(x,y) \in U \times U$, a wtedy mielibyśmy

$$< A\varphi, \varphi >< 0, \qquad \varphi = \chi_{U\times U}.$$

Zatem $a(x,x) \geqslant 0$ dla każdego $x \in [0,1]$. Z tych samych powodów

$$\sum_{n=1}^{N} \mu_n |e_n(x)|^2 \leqslant a(x,x) \leqslant M, \qquad x \in [0,1],$$

więc szereg $\sum_n \mu_n |e_n(x)|^2$ jest zbieżny dla każdego x. Co więcej

$$\sum_{n=N}^{\infty} \mu_n |e_n(x)\overline{e_n(y)}| \leqslant \left(\sum_{n=N}^{\infty} \mu_n |e_n(x)|^2\right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{n=N}^{\infty} \mu_n |e_n(y)|^2\right)^{1/2},$$

a zatem szereg (0.29) jest zbieżny wszędzie do $a(x,y)$. W takim razie szereg przekątniowy jest zbieżny do funkcji ciągłej $a(x,x)$. Na mocy twierdzenia Diniego zbieżność jest jednostajna, co pociąga jednostajną zbieżność szeregu (0.29), a zatem tezę naszego twierdzenia. $\square$