Wskazówki do zadań

1. **Lemat.** *Niech X będzie przestrzenią metryczną. Ciąg (x_n) jest fundamentalny, wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego ciągu liczb naturalnych (k_n)*

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{dist}(x_{n+k_n}, x_n) = 0.$$

2. **Lemat.** *Przestrzeń l^1 jest ciągowo słabo zupełna.*

Dowód. Niech (f_n) będzie ciągiem elementów l^1 fundamentalnym w topologii słabej. Na mocy Lematu 1 dla każdego ciągu k_n ciąg $f_{n+k_n} - f_n$ zbiega słabo do zera. Własność Schura pociąga, że również w normie. Stosując jeszcze raz Lemat 1, wnosimy że ciąg (f_n) jest fundamentalny w normie, a zatem zbieżny w l^1 w normie i słabo. □

3. **Wniosek.** *Niech Ω będzie przestrzenią z miarą μ, a (f_n) ciągiem funkcji całkowalnych, takim że dla każdej funkcji mierzalnej i ograniczonej g, ciąg $\int f_n g\,d\mu$ jest zbieżny. Wtedy wzór*

$$\nu(E) = \lim \nu_n(E) = \lim_n \int_E f_n d\mu$$

definiuje miarę znakowaną.

Dowód. Pokażemy, że tak zdefiniowana funkcja zbioru ν jest przeliczalnie addytywna. Niech

$$A = \cup_k A_k,$$

gdzie A_k są mierzalne i parami rozłączne. Definiujemy elementy $a_n \in l^1$ wzorem

$$a_n(k) = \nu_n(A_k).$$

Ciąg a_n jest słabo fundamentalny w l^1, co łatwo wynika z założenia. Na mocy Lematu 2 ma słabą granicę $a \in l^1$. Zauważmy, że z definicji

$$a(k) = \nu(A_k).$$

W takim razie

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \nu(A_k) &=< a, 1 >= \lim_{n\to\infty} < a_n, 1 > \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \nu_n(A_k) = \lim_{n\to\infty} \nu_n(\cup_{k=1}^{\infty} A_k) \\ &= \nu(\cup_{k=1}^{\infty} A_k) = \nu(A),\end{aligned} \tag{4}$$

co było naszym celem. □

Uwaga. Jak widać, wszystko w końcu sprowadza się do małego l^1, więc moja wcześniejsza wskazówka była chyba nietrafna.

5. **Lemat.** *Niech*

$$Tf(x) = \int_X k(x,y) f(y)\,dy$$

bedzie operatorem całkowym na przestrzeni X z miarą dy*. Jeśli jądro całkowe spełnia oszacowania*

$$\int |k(x,y)|\,dx \leqslant C, \qquad |\int |k(x,y)|\,dy \leqslant C,$$

(niezależnie od zmiennej wolnej) dla pewnej stałej C, to dla każdego $1 < p < \infty$, operator T jest ograniczony na $L^p(X)$) z normą $\|T\| \leqslant C$.

Dowód. Dowód opiera się na dwukrotnie stosowanej nierówności Höldera. Niech będą dane funkcje $f \in L^p(X)$, $g \in L^q(X)$, gdzie $1/p + 1/q = 1$. Mamy

$$|< Tf, g >| \leqslant \int \int |k(x,y)f(y)|\, dy |g(x)|\, dx.$$

Szacujemy wewnętrzną całkę

$$\begin{aligned}\int |k(x,y)f(y)|\, dy &= \int |k(x,y)|^{1/q}|k(x,y)|^{1/p}|f(y)|\, dy \\ &\leqslant \left(\int |k(x,y)|\, dy\right)^{1/q} \left(\int |k(x,y)||f(y)|^p\, dy\right)^{1/p} \leqslant C^{1/q}F(x)\end{aligned}$$

gdzie

$$F(x) = \left(\int |k(x,y)||f(y)|^p\, dy\right)^{1/p}.$$

Zauważmy, że

$$\int F(x)^p\, dx = \int |k(x,y)||f(y)|^p\, dydx \leqslant C\|f\|_p^p.$$

Zatem

$$\begin{aligned}|< Tf, g >| &\leqslant C^{1/q} \int F(x)|g(x)|\, dx \leqslant C^{1/q} \left(\int F(x)^p\, dx\right)^{1/p} \|g\|_q \\ &\leqslant C^{1/q}C^{1/p}\|f\|_p\|g\|_q = C\|f\|_p\|g\|_q,\end{aligned}$$

skąd wynika teza. □