Operatory zwarte

Niech X będzie przestrzenią Banacha. Odwzorowanie liniowe T nazywa się *zwarte*, jeśli obraz kuli jednostkowej $T(B)$ jest zbiorem warunkowo zwartym. Przestrzeń wszystkich operatorów zwartych na X oznaczamy przez $\mathcal{C}(X)$. Wprost z definicji widać, że każdy operator T, dla którego $\dim \operatorname{Im} T < \infty$, jest zwarty. Łatwo też zauważyć, że $\mathcal{C}(X)$ jest przestrzenią liniową.

0.1. *Uwaga.* Każdy operator liniowy $T \in \mathcal{B}(X)$ jest słabo-słabo ciągły.

0.2. Lemat. *Jeśli T jest odwzorowaniem zwartym na X, to dla każdego ciągu (x_n)*

$$x_n \to_w 0 \implies Tx_n \to 0.$$

W takim razie każde odwzorowanie zwarte jest ciągłe, a więc $\mathcal{C}(X) \subset \mathcal{B}(X)$. Przy dodatkowych założeniach implikację można odwrócić.

0.3. Twierdzenie. *Jeśli H jest ośrodkową przestrzenią Hilberta, to operator T przeprowadzający ciągi słabo zbieżne w zbieżne jest zwarty.*

Mamy też

0.4. Twierdzenie. *Niech X będzie refleksywna. Wtedy $T \in \mathcal{C}(X)$, wtedy i tylko wtedy gdy $T : B \to X$ jest słabo-mocno ciągły.*

Dowód. Niech $T : B \to X$ będzie słabo-mocno ciągły. X jest refleksywna, więc kula $B \subset X_w$ jest zwarta, a stąd obraz $T(B)$ jest zwarty w normie. Zatem operator T jest zwarty.

Druga implikacja nie wymaga założenia refleksywności. Niech $T : X \to X$ będzie zwarty. Wtedy $\overline{T(B)}$ jest zbiorem zwartym i topologie słaba oraz normowa na tym zbiorze się pokrywają. Jako że każdy operator liniowy jest słabo-słabo ciągły, T odwzorowuje B w sposób słabo-mocno ciągły. $\square$

0.5. Lemat. *Jeśli $T_n \in \mathcal{C}(X)$ i $T_n \to T$, to $T \in \mathcal{C}(X)$, a więc przestrzeń liniowa $\mathcal{C}(X)$ jest domknięta.*

0.6. Twierdzenie. *Jeśli $T \in \mathcal{C}(X)$ i $A \in \mathcal{B}(X)$, to $AT \in \mathcal{C}(X)$ i $TA \in \mathcal{C}(X)$. Innymi słowy $\mathcal{C}(X)$ jest dwustronnym domkniętym ideałem w $\mathcal{B}(X)$.*

Zauważmy mimochodem, że $\mathbf{c_0}$ jest ideałem w $\mathbf{l}^\infty$. Analogia ta nie jest, jak zobaczymy, przypadkowa.

0.7. Lemat. *Jeśli T jest odwzorowaniem całkowym na przestrzeni Hilberta $X = L^2(\Omega)$ z jądrem $k \in L^2(M \times M)$*

$$Tf(x) = \int_M k(x, y) f(y)\, dy,$$

to T jest odwzorowaniem zwartym o normie $\|T\| \leqslant \|k\|_2$.

0.8. Lemat. *Jeśli T jest odwzorowaniem na przestrzeni Hilberta H spełniającym warunek*

$$\sum_n \|Te_n\|^2 < \infty,$$

to T jest zwarty i $\|T\|^2 \leqslant \sum_n \|Te_n\|^2$.

0.9. Lemat. *Jeśli $T \in \mathcal{C}(X)$, to $T' \in \mathcal{C}(X^\star)$.*

Dowód. Rozważmy przestrzeń $C(\overline{T(B)})$ funkcji ciągłych na zwartym domknięciu obrazu kuli jednostkowej $B \subset X$. Funkcjonały z kuli jednostkowej $B^\star \subset X^\star$ stanowią domkniętą podprzestrzeń funkcji jednakowo ciągłych w $C(\overline{T(B)})$, a więc podzbiór zwarty. Odwzorowanie

$$C(\overline{T(B)}) \ni f \to f \circ T \in C(B)$$

jest ciągłe, więc obraz $B^\star$ przez to odwzorowanie jest zwarty. Jeśli zanurzymy $X^\star$ w zwykły sposób w $C(B)$, to obraz ten jest równy $T'(B^\star)$. $\square$

0.10. Lemat. *Przypuśćmy, że X ma bazę Schaudera $\{e_n\}$. Oznacza to, że dla każdego x mamy jednoznaczne przedstawienie*

$$x = \sum_n \alpha_n(x) e_n.$$

Wówczas

$$\mathbf{m}(x) = \sup_N \| \sum_{k=1}^N \alpha_k(x) e_k \|$$

jest normą zupełną równoważną normie $\| \cdot \|$. Co więcej, funkcjonały α_k są ciągłe (względem obu norm).

Dowód. Zauważmy, że $\mathbf{m}(x) < \infty$ dla każdego x, bo ciąg sum częściowych szeregu Schaudera jest zbieżny, a więc ograniczony. Jednorodność i własność trójkąta są oczywiste. Mamy też

$$\|x\| = \| \sum_{j=1}^\infty \alpha_j(x) e_j \| = \lim_{N \to \infty} \| \sum_{k=1}^N \alpha_k(x) e_k \| \leqslant \mathbf{m}(x).$$

Mamy też

$$|\alpha_k(x)| \, \|e_k\| \leqslant \mathbf{m}_k(x) + \mathbf{m}_{k-1}(x) \leqslant 2\mathbf{m}(x),$$

więc funkcjonały α_N są ciągłe względem normy $\mathbf{m}$.

Norma $\mathbf{m}$ jest także zupełna. Aby to udowodnić, przypuśćmy, że (x_n) jest ciągiem Cauchy'ego względem normy $\mathbf{m}$. Wtedy dla każdego k ciąg $\alpha_k(x_n)$ jest zbieżnym ciągiem liczbowym. Niech $a_k = \lim_n \alpha_k(x_n)$. Dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje n_0, takie że dla $n, m \geqslant n_0$ i dowolnego N

$$\| \sum_{k=1}^N \alpha_k(x_n) e_k - \sum_{k=1}^N \alpha_k(x_m) e_k \| \leqslant \varepsilon,$$

a stąd dla dowolnego $M < N$

$$\| \sum_{k=M}^N \alpha_k(x_n) e_k - \sum_{k=M}^N \alpha_k(x_m) e_k \| \leqslant 2\varepsilon.$$

Przechodząc do granicy z m, otrzymujemy

$$\| \sum_{k=M}^N \alpha_k(x_n) e_k - \sum_{k=M}^N a_k e_k \| \leqslant 2\varepsilon,$$

a więc

$$\| \sum_{k=M}^N a_k e_k \| \leqslant 2\varepsilon + \| \sum_{k=M}^N \alpha_k(x_n) e_k \|,$$

skąd już łatwo wnioskujemy, że szereg $\sum_{k=1}^\infty a_k e_k$ jest zbieżny w normie $\| \cdot \|$ i reprezentuje wektor x_0, taki że

$$\mathbf{m}(x_n - x_0) = \sup_N \| \sum_{k=1}^N \alpha_k(x_n) - \sum_{k=1}^N a_k e_k \| \leqslant 2\varepsilon$$

dla $n \geqslant n_0$. Zatem ciąg (x_n) jest zbieżny do x_0 w normie $\mathbf{m}$, która okazuje się zupełna.

Jak zupełne i prównywalne normy $\| \cdot \|$ oraz $\mathbf{m}$ są więc równoważne, a funkcjonały α_k są ciągłe także względem normy wyjściowej $\| \cdot \|$. $\square$

0.11. Twierdzenie. *Jeśli przestrzeń X ma bazę Schaudera, to każdy operator $T \in \mathcal{C}(X)$ jest granicą w normie operatorów skończonego wymiaru.*

Dowód. Niech $\{e_n\}$ będzie bazą. Projektory

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(x) e_k$$

są ciągłe i zbieżne mocno do I. Jako, że zbiór $T(B)$ jest warunkowo zwarty, P_n są zbieżne jednostajnie na $T(B)$, a to oznacza, że $P_n T \to T$ w normie. $\square$

Kolejny lemat wprowadza namiastkę pojęcia ortogonalności w przestrzeniach Banacha.

0.12. Lemat (Riesz). *Jeśli Y jest domkniętą podprzestrzenią X, to dla każdej liczby $0 < q < 1$ istnieje $u \in X$ o normie 1, taki że $\operatorname{dist}(u, Y) > q$.*

Dowód. Niech $x \notin Y$ i niech $y \in Y$ będzie takie, że $\alpha = \|x - y\| < q^{-1} \operatorname{dist}(x, Y)$. Niech $u = \alpha^{-1}(x - y)$. Jak widać, $\|u\| = 1$ oraz

$$\operatorname{dist}(u, Y) \geqslant \alpha^{-1} \operatorname{dist}(x, Y) > q.$$

$\square$

Niech X_n będzie ciągiem domkniętych niezmienniczych podprzestrzeni operatora liniowego T. Jeśli $X_n \subset X_{n+1}$, $x_n \in X_n \setminus X_{n-1}$ i

$$Tx_n = \lambda_n x_n \qquad (\operatorname{mod} X_{n-1}),$$

to mówimy, że ciągi (X_n, x_n, λ_n) tworzą *górny układ trójkątny* dla T.

Jeśli natomiast $X_{n+1} \subset X_n$, $x_n \in X_n \setminus X_{n+1}$ i

$$Tx_n = \lambda_n x_n \qquad (\operatorname{mod} X_{n+1}),$$

to mówimy o *dolnym układzie trójkątnym.*

0.13. Lemat. *Jeśli (X_n, x_n, λ_n) jest nieskończonym górnym lub dolnym układem trójkątnym dla $T \in \mathcal{C}(X)$, to $\lambda_n \to 0$.*

Dowód. Niech (X_n, x_n, λ_n) będzie górnym układem trójkątnym. Niech

$$y_n \in < X_{n-1} \cup \{x_n\} >$$

będzie wektorem jednostkowym i takim, że $\operatorname{dist}(y_n, X_{n-1}) \geqslant 1/2$. Wtedy

$$Ty_n = \lambda_n y_n \ (\operatorname{mod} X_{n-1}),$$

więc dla $m > n$

$$Ty_m - Ty_n = \lambda_n y_m \ (\operatorname{mod} X_n),$$

a to oznacza, że

$$\|Ty_m - Ty_n\| \geqslant |\lambda_m|/2$$

dla nieskończenie wielu n. Gdyby ciąg (λ_n) nie dążył do zera, istniałby podciąg Ty_{m_k}, z którego nie dało by się wybrać zbieżnego podciągu.

$\square$

0.14. Twierdzenie. *Niech X będzie przestrzenią Banacha. Niech $T \in \mathcal{C}(X)$ i niech $A = I + T$. Wtedy*

i) *Obraz operatora A jest domknięty.*

ii) *A jest surjekcją, wtedy i tylko wtedy gdy jest injekcją.*

iii) $\dim \ker A < \infty$ *oraz* $\operatorname{codim} \operatorname{Im} A < \infty$.

Dowód. i). Niech $\widetilde{A} : X/\ker A \to \operatorname{Im} A$ będzie zadany wzorem $\widetilde{A}(\pi(x)) = Ax$, gdzie $\pi : X \to X/\ker A$ jest odwzorowaniem ilorazowym. Pokażemy, że istnieje stała $c > 0$, taka że

$$\|\widetilde{A}(\pi(x))\| \geqslant c\|\pi(x)\|, \qquad x \in X.$$

Gdyby tak nie było, to istniałby ciąg $\|x_n\| \leqslant 2$, taki że $\|\pi(x_n)\| = 1$ oraz

$$\|\pi(x_n) + \widetilde{T}\pi(x_n)\| \leqslant 1/n,$$

a więc i podciąg (x_{n_k}), taki że

$$\lim_{k\to\infty} \pi(x_{n_k}) = -\lim_{k\to\infty} \widetilde{T}\pi(x_{n_k}) = \pi(x_0).$$

Jak jednak łatwo zauważyć, $\pi(x_0) + \widetilde{T}\pi(x_0) = 0$, więc $x_0 \in \ker A$, ale to nie jest możliwe, bo $\|\pi(x_0)\| = 1$.

Z udowodnionej nierówności wynika, że $\widetilde{A}$ jest izomorfizmem na $\operatorname{Im} A$, który jest wobec tego domknięty.

ii). Przypuśmy nie wprost, że A jest surjekcją, ale nie injekcją. Zdefiniujemy indukcyjnie ciąg wektorów. Niech $x_0 = 0$ i niech $0 \neq x_1 \in \ker A$. Jeśli dany jest już wektor x_n, niech $Ax_{n+1} = x_n$. Niech jeszcze

$$X_n =< x_0, x_1, \ldots, x_n >, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Jak łatwo widzieć, $x_n \in X_n \backslash X_{n-1}$ i $Tx_{n+1} = -x_{n+1} + x_n$. Zatem $(X_n, x_n, -1)$ tworzą nieskończony górny układ trójkątny, gdzie $\lambda_n = -1$ dla wszystkich n, co być nie może.

Jeśli teraz A jest injektywny, ale nie jest surjekcją, to obraz $\operatorname{Im} A$ jako domknięty nie jest gęsty. Stąd A', który jest tej samej postaci, jest nieinjektywną surjekcją, co daje sprzeczność na mocy poprzednich rozważań.

iii). Na podprzestrzeni $\ker A$ zwarty operator T jest równy $-I$, więc jej wymiar musi być skończony. Skończony jest także wymiar jądra $A' = I + T'$, co pociąga, że wymiar przestrzeni $(\operatorname{Im} A)^{\perp} = \{\xi \in X' : \xi(x) = 0,\ x \in \operatorname{Im} A\}$ jest skończony. Zatem dopełnienie algebraiczne obrazu $\operatorname{Im} A$, który jest podprzestrzenią domkniętą, ma wymiar skończony. □

0.15. Twierdzenie. *Niech T będzie operatorem zwartym. Spektrum $\sigma(T)$ jest zbiorem co najwyżej przeliczalnym i jego punktem skupienia może być tylko 0. Każdy niezerowy element $\lambda \in \sigma(T)$ jest wartością własną skończonej krotności.*

Dowód. Niech $0 \neq \lambda \in \sigma(T)$. Operator $\lambda I - T = \lambda(I - \lambda^{-1}T)$ jest nieodwracalny, więc musi być injektywny. Zatem λ jest wartością własną skończonej krotności, bo wymiar jądra $I - \lambda T$ jest skończony.

Niech λ_n będzie ciągiem parami różnych wartości własnych zbieżnym do λ. Niech x_n będzie wektorem własnym odpowiadającym λ_n. Niech $X_n =< \{x_k\}_{k=1}^n >$. Wtedy (X_n, x_n, λ_n) jest nieskończonym górnym układem trójkątnym, a zatem

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0,$$

jak chcieliśmy. Spektrum jest przeliczalne, bo jest zbiorem o co najwyżej jednym punkcie skupienia. □

Uwaga. Jeśli spektrum jest nieskończone, to $0 \in \sigma(T)$, bo wtedy ciąg wartości własnych jest zbieżny do zera. Zero nie musi być wartością własną, bo T może mieć zerowe jądro (operator Volterry). Jeśli jednak zero jest wartością własną, jego krotność może być nieskończona, jak w przykładzie

$$Ax(n) = \frac{\varepsilon_n}{n} x(n), \qquad x \in c_0, \quad \varepsilon_n = \frac{1 + (-1)^n}{2}.$$

0.16. Wniosek. *Niech H będzie przestrzenią Hilberta, a $T \in \mathcal{C}(H)$. Istnieją wówczas układy ortonormalne $\{e_n\}$ i $\{f_n\}$ oraz ciąg liczb $\mu_n > 0$, takie że*

$$Tx = \sum_n \mu_n < x, e_n > f_n, \qquad x \in H.$$

Dowód. Niech $\{e_n\}$ będzie układem ON wektorów własnych $|T|$ odpowiadających jego niezerowym wartościom własnym μ_n. Niech $Y = \overline{< \{e_n\} >}$. Mamy

$$Y^{\perp} = \ker |T| = \ker T.$$

Niech $T = U|T|$ będzie rozkładem polarnym T. Wtedy

$$Tx = T(\sum_n < x, e_n > e_n) = \sum_n \mu_n < x, e_n > f_n,$$

gdzie $f_n = Uf_n$. □

0.17. Lemat. *Niech H będzie przestrzenią Hilberta, a $T \in \mathcal{C}(H)$ będzie normalny. Jeśli $Tu = \lambda u$, to $T^{\star}u = \bar{\lambda}u$. Ponadto przestrzenie własne H_λ i H_μ są ortogonalne dla $\lambda \neq \mu$.*

Dowód. Mamy

$$H_\lambda = \{x \in X : Tx = \lambda x\}.$$

Jako że

$$T(T^{\star}u) = T^{\star}(Tu) = \lambda T^{\star}u,$$

przestrzeń ta jest niezmiennicza dla obu operatorów. Zatem $T^{\star} = \bar{\lambda}I$ na H_λ. Jeśli teraz $\lambda_1 \neq \lambda_2$ są wartościami własnymi T, a u_1 i u_2 odpowiadającymi im wektorami własnymi, to

$$\lambda_1 < u_1, u_2 >=< Tu_1, u_2 >=< u_1, T^{\star}u_2 >= \lambda_2 < u_1, u_2 >,$$

a więc $< u_1, u_2 >= 0$. □

0.18. Wniosek. *Niech H będzie przestrzenią Hilberta, a $T \in \mathcal{C}(H)$ będzie normalny. Niech $\{\lambda_n\}$ będzie ciągiem jego wszystkich wartości własnych liczonych wraz z krotnościami. Istnieje wówczas baza ortonormalna $\{e_n\}$, taka że*

$$Tx = \sum_n \lambda_n < x, e_n > e_n, \qquad x \in H. \tag{0.19}$$

Niech T będzie zwartym operatorem normalnym. Niech $\{e_n\}$ będzie bazą jego wektorów własnych. Oznaczmy przez P_n rzut ortogonalny na $\boldsymbol{C}e_n$. Wzór (0.19) możemy zapisać w postaci

$$T = \sum_n \lambda_n P_n,$$

gdzie szereg jest zbieżny w normie. Rzeczywiście,

$$\| \sum_{n \geqslant N} \lambda_n P_n \| \leqslant \max_{n \geqslant N} |\lambda_n| \to 0, \qquad N \to \infty.$$

W szczególności dla wektorów $x, y \in H$

$$< Tx, y >= \sum_n \lambda_n < P_n x, y >= \int_{\sigma(T)} \lambda \, \mu_{x,y}(d\lambda),$$

gdzie μ jest miarą znakowaną na $\boldsymbol{C}$ o nośniku w $\sigma(T)$ określoną wzorem

$$\mu(E) = \sum_{\lambda \in E} \lambda.$$

Mamy $\|\mu_{x,y}\| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$. Jeśli $y = x$, to $\mu_x = \mu_{x,x}$ jest miarą dodatnią o całkowitym wahaniu $\|\mu\| = \|x\|^2$.

Twierdzenie spektralne uogólnia ten opis na wszystkie ograniczone operatory normalne.