Rozwiązanie zadania 13. z konwersatorium

Aleksandra Spyra

14 października 2011

Cel: Zsumowanie szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} d(x^n)$, gdzie $d(y)$ oznacza odległość liczby rzeczywistej y od najbliższej liczby całkowitej oraz $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Zauważmy, że zachodzi równość $x^2 = x+1$. Wobec tego możemy udowodnić następujący

Lemat: Dla dowolnego $n \in \mathbf{N}$ zachodzi

$$x^n = F_n x + c,$$

gdzie F_n oznacza n-tą liczbę Fibonacciego, a $c \in \mathbf{Z}$.
Dowód:
Dla $n = 1$:

$$x^1 = 1 * x = F_1 x + 0 = F_1 x + c_1.$$

Dla $n = 2$:

$$x^2 = x + 1 = F_2 x + 1 = F_2 x + c_2.$$

Załóżmy, że twierdzenie zachodzi dla wszystkich $k \leq n$, gdzie $n \geq 2$. Wówczas

$$x^{n+1} = x^2 x^{n-1} = (x+1)x^{n-1} = x^n + x^{n-1} = F_n x + c_n + F_{n-1}x + c_{n-1} = F_{n+1}x + c_{n+1}.$$

Z powyższego lematu wynika, że $\sum_{n=0}^{\infty} d(x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} d(F_n x)$.

Zajmiemy się teraz wyrazami szeregu dla $n \geq 2$ i skorzystamy z tego, że $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = -1$. Mamy

$$xF_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)\right)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right)$$

Ze wzoru Bineta wynika, że:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)=F_{n+1},$$

więc jest liczbą całkowitą oraz dla $n \geq 2$

$$\begin{aligned}
R_n &= \left|\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right)\right| \\
&= \left|\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)\right)\right| \\
&= \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{n} < \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Wobec tego wyrazy szeregu, począwszy od $n = 2$, tworzą ciąg geometryczny i suma szeregu wynosi

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} d(x^n) &= R_0 + R_1 + \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{n} \\
&= 0 + \frac{3-\sqrt{5}}{2} + \frac{3-\sqrt{5}}{2} * \frac{1}{1-\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \\
&= \frac{3-\sqrt{5}}{2} + 1.
\end{aligned}$$