Marcin Kaczmarek

Gęstość wielokrotności liczby niewymiernej

Fakt: *Niech ξ będzie liczbą niewymierną. Wtedy każdy punkt odcinka* $[0,1]$ *jest punktm skupienia ciągu* $\xi_n = \mathbf{m}(n\xi)$.

Dowód: Swój dowód sprowadzę do pokazania, że w każdym przedziale domkniętym $[a,b] \subset (0,1)$, $a < b$, istnieje nieskończenie wiele wyrazów ciągu $\{\xi_n\}$. Wtedy bowiem dla każdego $p \in [0,1]$, jakkolwiek wybrane jego otoczenie (przedział otwarty zawierający p), ma niepusty przekrój z odcinkiem $(0,1)$ nie będący singletonem. W tymże przekroju istnieje przedział domknięty niezerowej długości, w którym to, jak się okaże, znajduje sie nieskończenie wiele wyrazów ciągu $\{\xi_n\}$, co czyni p punktem skupienia tego ciągu.

Wybierzmy więc jakikolwiek przedział domknięty $[a,b] \subset (0,1)$, $a < b$. Jako że ciąg $\{\xi_n\}$ jest ograniczony, na mocy Twierdzenia Bolzano-Weierstrass'a możemy wybrać jego podciąg zbieżny. Z własności ciągu Cauchy'ego oraz tego, że ciąg $\{\xi_n\}$ jest różnowartościowy (czego prosty dowód pomijam), uzyskujemy istnienie takich $k, l \in \mathbf{N}$, że $k < l$ oraz $|\xi_k - \xi_l| = \delta$, gdzie $0 < \delta < b - a$. Weźmy więc takie k i l oraz obierzmy dodatkowo $d = l - k$.

Kiedy $\xi_k > \xi_l$, czyli $\delta = \xi_k - \xi_l$, zauważmy że

$$\delta = \mathbf{m}(\delta) = \mathbf{m}\left(\mathbf{m}(k\xi) - \mathbf{m}(l\xi)\right) = \mathbf{m}\left((k-l)\xi\right) = \mathbf{m}(-d\xi) = 1 - \xi_d.$$

Weźmy teraz $s = \left[\frac{1-a}{\delta}\right] \geqslant 1$, wówczas

$$\left(\frac{1-a}{\delta} - 1\right)\delta < s\delta \leqslant \frac{1-a}{\delta} \cdot \delta,$$

tym samym

$$1 - b < 1 - (a + \delta) < s\delta \leqslant 1 - a.$$

Z całą pewnością zarówno $1 - b$, jak i $1 - a$ należą do przedziału $[0,1)$, zatem

$$1 - b < \mathbf{m}(s\delta) \leqslant 1 - a.$$

Spójrzmy teraz na wyraz ξ_{sd}:

$$\xi_{sd} = \mathbf{m}(sd\xi) = \mathbf{m}(s\xi_d) = \mathbf{m}\left(s(1-\delta)\right) = \mathbf{m}(-s\delta) = 1 - \mathbf{m}(s\delta).$$

Teraz z oszacowania $\mathbf{m}(s\delta)$ otrzymujemy

$$a \leqslant \xi_{sd} < b,$$

czyli znaleźliśmy wyraz ciągu $\{\xi_n\}$ należący do przedziału $[a,b]$.

Podobnie sprawa się ma, kiedy $\xi_k < \xi_l$. Wtedy oczywiście $\delta = \xi_l - \xi_k$. Dalej dostajemy

$$\delta = \mathbf{m}\left((l-k)\xi\right) = \xi_d.$$

Tym razem ustalmy $s = \left[\frac{b}{\delta}\right] \geqslant 1$. W takim razie

$$\left(\frac{b}{\delta} - 1\right)\delta < s\delta \leqslant \frac{b}{\delta} \cdot \delta,$$

zatem $a < b - \delta < s\delta \leqslant b$, czyli $a < \mathbf{m}(s\delta) \leqslant b$. Ale przecież

$$\xi_{sd} = \mathbf{m}(s\xi_d) = \mathbf{m}(s\delta),$$

więc i w tym wypadku znaleźlismy wyraz ciągu $\{\xi_n\}$ leżący na odcinku $[a, b]$.

Oczywiście istnienie jednego wyrazu ciągu w dowolnym przedziale domkniętym $[a, b] \subset (0, 1)$, $a < b$, natychmiast pociąga za sobą istnienie nieskończenie wielu takich liczb, gdyż mając jakiś wyraz ξ_k na odcinku $[a, b]$, łatwo możemy wskazać przedział domknięty niezerowej długości w zbiorze $[a, b] \setminus \{\xi_k\}$, w którym też jakiś wyraz ciągu $\{\xi_n\}$ musi się znajdować. Proces odnajdywania coraz to nowych wyrazów można nieprzerwanie kontynuować. Fakt ten kończy dowód.

Wniosek: *Dla ciągu* $\sigma_n = \sin n$ *każdy punkt odcinka* $[-1, 1]$ *jest punktem skupienia.*

Dowód: Połóżmy ciąg $\varphi_n = 2\pi\mathbf{m}\left(\frac{n}{2\pi}\right)$. Liczba $\frac{1}{2\pi}$ jest niewymierna, zatem na mocy niedawno pokazanego faktu przedział $[0, 1]$ jest zbiorem punktów skupienia ciągu $\left\{\mathbf{m}\left(\frac{n}{2\pi}\right)\right\}$. Wynika z tego w prosty sposób, że przedział $[0, 2\pi]$ jest z kolei zbiorem punktów skupienia ciągu $\{\varphi_n\}$. Zaobserwujmy, że

$$\sin\varphi_n = \sin\left(2\pi\mathbf{m}\left(\frac{n}{2\pi}\right)\right) = \sin\left(2\pi \cdot \frac{n}{2\pi} - 2\left[\frac{n}{2\pi}\right]\pi\right) = \sin n = \sigma_n.$$

Aby pokazać, że dowolnie obrane $p \in [-1, 1]$ jest punktem skupienia ciągu $\{\sigma_n\}$, wybieramy takie $\varphi \in [0, 2\pi]$, że $\sin\varphi = p$, co możemy zrobić, bowiem funkcja $\sin : [0, 2\pi] \to [-1, 1]$ jest „na". Jako że φ jest punktem skupienia ciągu $\{\varphi_n\}$, to istnieje jego podciąg $\{\varphi_{n_k}\}$ zbieżny do φ. Skoro *sinus* jest funckją ciągłą, to $\varphi_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} \varphi$ implikuje

$$\sigma_{n_k} = \sin\varphi_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} \sin\varphi = p.$$

W ten sposób pokazaliśmy, że ciąg $\{\sigma_n\}$ ma podciąg zbieżny do p, zatem p rzeczywiście jest punktem skupienia tego ciągu, co było do okazania.