Gęstość wielokrotności niewymiernych

Michał Warchalski

Dla liczby rzeczywistej x przez $\mathbf{m}(x)$ oznaczamy jej mantysę albo inaczej część ułamkową. Oczywiście, $\mathbf{m}(x) \in [0, 1)$.

0.1. **Lemat (Dirichlet)).** *Dla dowolnej liczby niewymiernej ξ i naturalnej n istnieją takie liczby naturalne p, q, że spełniona jest zależność:*

$$|q\xi - p| < \frac{1}{n}$$

Dowód. Rozważmy przedziały $(0, \frac{1}{n}), (\frac{1}{n}, \frac{2}{n}), ..., (\frac{n-1}{n}, 1)$ i $\mathbf{m}(k\xi)$ dla $k = 1, 2, .., n$. Są dwie możliwe sytuacje: albo każda z liczb $\mathbf{m}(k\xi)$ znajdzie się w innym z wyżej wymienionych przedziałów, albo (korzystając z zasady szufladkowej) pewne dwie znajdą się w tym samym (oczywiście nie może się zdarzyć, że dla pewnych liczb całkowitych l, m mamy $\mathbf{m}(l\xi) = \frac{m}{n}$, bo znaczyłoby to, że $l\xi$ jest liczbą wymierną, a przecież całkowite wielokrotności liczb niewymiernych są liczbami niewymiernymi). W pierwszej sytuacji otrzymujemy od razu tezę lematu, bo dla pewnych naturalnych z, x:

$$|x\xi - z| < \frac{1}{n}$$

W drugiej sytuacji niech x, y $(x > y)$ będą takie, że $\mathbf{m}(x\xi)$ i $\mathbf{m}(y\xi)$ należą do tego samego przedziału. Wynika stąd, że dla pewnej liczby naturalnej z:

$$|(x - y)\xi - z| = |x\xi - y\xi - z| < \frac{1}{n}$$

i otrzymujemy tezę lematu. □

0.2. **Twierdzenie (o gęstości).** *Jeśli ξ jest liczbą niewymierną, to wyrazy ciągu $\xi_n = \mathbf{m}(n\xi)$ leżą gęsto w odcinku $[0, 1]$.*

Dowód. Będziemy kilkakrotnie korzystać z tego, że każdy punkt odcinka I jest punktem skupienia ciągu wtedy i tylko wtedy, gdy w każdym przedziale otwartym zawartym w I znajduje się przynajmniej jeden wyraz tego ciągu. Załóżmy nie wprost, że istnieje taki przedział $(a, b) \subset [0, 1]$, że nie znajduje się w nim żaden wyraz ciągu ξ_n. Możemy przyjąć, że $|a - b| = \frac{1}{m}$, gdzie m jest naturalne. Z lematu wynika, że można wybrać takie naturalne k, że

$$\mathbf{m}(k\xi) < \frac{1}{m} \text{ lub } \mathbf{m}(k\xi) > 1 - \frac{1}{m}.$$

Zauważmy, że w pierwszym przypadku jeśli t jest najmniejszą liczbą naturalną, taką że $t\mathbf{m}(ck\xi) > 1$, to jeśli $c \in \{1, ..., t - 1\}$, to $\mathbf{m}(ck\xi) = c\mathbf{m}(\mathbf{m}(k\xi))$. Stąd z kolei możemy wyprowadzić wniosek, że istnieje takie $p \in \{1, ..., t - 1\}$, że

$$a < p\mathbf{m}(\mathbf{m}(k\xi)) = \mathbf{m}(pk\xi) < b.$$

W drugim przypadku jeśli t jest najmniejszą liczbą naturalną, taką że $t(1-\mathbf{m}(ck\xi)) > 1$, to jeśli $c \in \{1, ..., t - 1\}$, to $\mathbf{m}(ck\xi) = \mathbf{m}(c\mathbf{m}(k\xi))$. Zatem możemy wyprowadzić wniosek, że istnieje takie $p \in \{1, ..., t - 1\}$, że

$$a < \mathbf{m}(p\mathbf{m}(k\xi)) = \mathbf{m}(pk\xi) < b.$$

Dochodzimy zatem do sprzeczności, która kończy dowód gęstości. □

0.3. **Wniosek.** *Jeśli ξ jest liczbą niewymierną, to wyrazy ciągu $\sigma_n = \sin n\xi$ leżą gęsto w odcinku $[-1, 1]$.*

Dowód. Dla dowolnej liczby dodatniej a zdefiniujmy

$$\mathbf{m}_{2\pi}(a) = 2\pi\mathbf{m}\left(\frac{a}{2\pi}\right).$$

Jako że $1/2\pi$ jest liczbą niewymierną, z pierwszej części zadania wynika, że ciąg $\mathbf{m}_{2\pi}(n)$ jest gęsty w przedziale $[0, 2\pi]$, a więc tym bardziej w przedziale $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$. Załóżmy nie wprost, że istnieje taki przedział $(\sin\alpha, \sin\gamma) \in [-1, 1]$ (dowolną liczbę z przedziału $[-1, 1]$ możemy wyrazić za pomocą $\sin\phi$ dla pewnego $\phi \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$), że nie leży w nim żaden wyraz ciągu σ_n. Jednak możemy przecież wybrać takie $q \in \mathbb{N}$, że $\mathbf{m}_{2\pi}(q) \in (\alpha, \gamma)$, co implikuje $\sin q \in (\sin\alpha, \sin\gamma)$. Sprzeczność ta kończy dowód. $\square$