ZADANIE DOMOWE NR 1

MARCIN KACZMAREK

Fakt: *Niech $L > 0$ będzie obwodem dowolnego trójkąta, a $P > 0$ jego polem. Wtedy*

$$L^2 \geqslant 4\sqrt{27}P,$$

a równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy trójkąt jest równoboczny.

Dowód: Weźmy dowolny trójkąt i przyjmijmy że $a, b, c > 0$ są długościami jego boków. Ustalmy również, że $2p = L$. Twierdzenie o nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną daje

$$\frac{p + 3(p-a) + 3(p-b) + 3(p-c)}{4} \geqslant \sqrt[4]{27p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

(Oczywiście na mocy nierówności trójkąta mamy zagwarantowane, że każda z liczb $p-a$, $p-b$, $p-c$ jest dodatnia.) Biorąc pod uwagę, że $L = 2p = a + b + c$, po prostych przekształceniach

$$L \geqslant 2\sqrt[4]{27}\sqrt[4]{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Następnie, wykorzystując wzór Herona:

$$P^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$$

i podnosząc obie strony do kwadratu, otrzymujemy

$$L^2 \geqslant 4\sqrt{27}P.$$

Aby dowiedzieć się, kiedy zachodzi równość, posłużmy się faktem, że średnia geometryczna i arytmetyczna sa równe wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie uśredniane wartości są równe. Zatem równość ma miejsce dokładnie wtedy, gdy

$$p = 3(p-a) = 3(p-b) = 3(p-c),$$

czyli

$$a = b = c,$$

to zaś oznacza, że trókąt jest równoboczny.