POTĘGA O WYKŁADNIKU RZECZYWISTYM

RAFAŁ BANACHOWICZ I BARTOSZ KUŚMIERZ

1. Definicje - część pierwsza

1.1. Definicja. Potęgę liczby rzeczywistej a o wykładniku naturalnym n można zdefiniować indukcyjnie:

$$a^0 = 1, \qquad a^{n+1} = a^n \cdot a.$$

Wyrażenie 0^0 jest także symbolem nieoznaczonym, ale tu zawsze przyjmujemy, że jest równe 1.

1.2. Definicja. Potęgę liczby rzeczywistej a o wykładniku n, gdzie liczba n jest liczbą całkowitą ujemną można zdefiniować tak:

$$a^n = \frac{1}{a^{-n}}.$$

1.3. *Uwaga.* Obie definicje - ta dla wykładników będących liczbami naturalnymi i nieujemnymi, całkowitymi dają łącznie definicję potęgi dla wszystkich liczb całkowitych.

1.4. Definicja. Dla liczby dodatniej a i liczby naturalnej n kładziemy

$$a^{1/n} = \sup\{z \geqslant 0 : z^n \leqslant a\}.$$

1.5. *Uwaga.* Należy zauważyć, że definicja jest poprawna, gdyż zbiór

$$E = \{z \geqslant 0 : z^n \leqslant a\}$$

jest niepusty jako że zawiera 0 i ograniczony z góry przez np. $1 + a$, a więc na mocy zasady ciągłości ma kres górny.

1.6. Twierdzenie. *Mamy*

$$(a^{1/n})^n = a$$

dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej a i każdej liczby naturalnej n.

Dowód. Ze zbioru E można wybrać ciąg $\{b_k\}$, który dąży do $a^{1/n}$. Należy jednak pamiętać, że zachodzi $b_k^n \leqslant a$, a więc na mocy twierdzenia o arytmetyce granic

$$(a^{1/n})^n = \lim_{k\to\infty} b_k^n \leqslant a.$$

Należy też zauważyć, że dla dowolnego $k \in \boldsymbol{N}$, $a^{1/n} + \frac{1}{k} \notin E$, a co za tym idzie

$$\left(a^{1/n} + \frac{1}{k}\right)^n \geqslant a,$$

skąd

$$(a^{1/n})^n = \lim_{k\to\infty} \left(a^{1/n} + \frac{1}{k}\right)^n \geqslant a.$$

Otrzymane nierówności dają tezę. □

Spostrzeżenie. Jeśli $a > 0$ i $n \in \boldsymbol{N}$, to $a^{1/n} > 0$.

1.7. *Uwaga.* Dla danej liczby nieujemnej a i liczby naturalnej n istnieje tylko jedna taka nieujemna liczba c, że $c^n = a$. Rzeczywiście, niech $c_1^n = c_2^n = a$. Mamy

$$0 = c_1^n - c_2^n = (c_1 - c_2) \sum_{k=1}^{n-1} c_1^k c_2^{k-1},$$

więc $c_1 = c_2$ lub $\sum_{k=1}^{n-1} c_1^k c_2^{k-1} = 0$. W tym drugim przypadku $c_1 = 0$ lub $c_2 = 0$, ale każda z tych możlwości pociąga $a = 0$, a zatem $c_1 = c_2 = 0$.

1.8. Wniosek. *Niech będzie dana liczba naturalna n i liczba rzeczywista a. Jeśli $a > 1$, to, to $a^{1/n} > 1$. Jeśli zaś $0 < a < 1$, to $a^{1/n} < 1$.*

Dowód. Załóżmy nie wprost, że $a^{1/n} \leqslant 1$. Iloczyn liczb rzeczywistych, dodatnich, mniejszych lub równych 1 jest sam mniejszy równy 1, co przeczy założeniu, że $a > 1$. Drugiej części dowodzi się podobnie. □

1.9. Definicja. Potęgę liczby rzeczywistej a o wykładniku wymiernym, dodatnim $\frac{p}{q}$ (liczby p i q są naturalne i $q \neq 0$) definiujemy jako

$$a^{p/q} = (a^{1/q})^p.$$

Potęgę liczby rzeczywistej a o wykładniku wymiernym, ujemnym $\frac{p}{q}$ (liczba p jest liczbą całkowitą ujemną, a q jest naturalną dodatnią) definiujemy jako

$$a^{p/q} = \frac{1}{a^{-p/q}}.$$

1.10. *Uwaga.* Obie definicje - ta dla wykładników będących liczbami wymiernymi dodatnimi oraz wymiernymi, nieujemnymi w połączeniu z definicją dla potęgi o wykładniku równym 0 definiują potęgę dla wszystkich wykładników wymiernych.

2. Własności potęg o wykładnikach wymiernych

Następujące własności są prawdziwe dla potęg o podstawach rzeczywistych dodatnich a i b, oraz o wykładnikach będących liczbami wymiernymi x, y:

1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$,
2) $(a^x)^y = a^{(x \cdot y)}$,
3) $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$.

Dla $x > y$, zachodzi ponadto:

4a) $a^x > a^y$, $\quad a > 1$
4b) $a^x < a^y$, $\quad a < 1$,
5) $a^x > 0$.

Dla wykładników całkowitych pierwsze trzy własności są oczywiste i wynikają z definicji i przemienności mnożenia liczb rzeczywistych. Punkt 4a) dla wykładników naturalnych wynika z tego, że po pomnożeniu liczby dodatniej przez liczbę większa od jedynki otrzymamy od niej liczbę większą. By uzyskać taki wniosek dla wykładników całkowitych wystarczy zrobić podstawienie: $z_1 = -x$, $z_2 = -y$ (gdzie z_1, z_2 są naturalne) i skorzystać z tej własności dla liczb naturalnych dodatnich, jak również zauważyć, że gdy jeden z wykładników jest równy zeru, to równość jest oczywista, tak samo jeśli jeden z wykładników jest większy od zera, a drugi mniejszy. W punkcie 4b) należy zrobić podstawienie $b = \frac{1}{a}$ i liczba b będzie większa od 1, a po wymnożeniu obu stron przez odpowiednio b^x i b^y będziemy mieć nierówność z punktu 4a). Punkt piąty wynika z definicji i z tego, że iloczyn, liczb nieujemnych jest również liczbą nieujemną.

By pokazać, że te własności zachodzą również dla wszystkich liczb wymiernych postaci p/q wystarczy zrobić podstawienie wynikające z definicji: $a^{p/q} = (a^{1/q})^p$ oraz $b^{r/s} = (b^{1/s})^r$ i traktować liczby: $a^{1/q}$ (jest ona nieujemna i leży po tej samej stronie od jedynki co a) jako wyjściowe a, $(b^{1/s})^r$ (też jest nieujemna i leży po tej samej stronie jedynki co b) jako wyjściowe b, oraz liczby naturalne p i r jako kolejno liczby x i y.

3. Definicje - część druga

3.1. Definicja. Potęgę liczby niewymiernej, dodatniej a o dowolnym wykładniku rzeczywistym x definiujemy następująco:

$$a^x = \lim_{n\to\infty} a^{w_n},$$

gdzie w_n jest ciągiem liczb wymiernych, który dąży do x dla n dążących do nieskończonosci.

3.2. *Uwaga.* Oczywiście zawsze istnieje taki ciąg liczb wymiernych, który dąży do danej liczby niewymiernej, jak również wartość tej granicy nie zależy od sposobu wyborów elementów tego ciągu, co wiemy z wykładu, a dokładniej z nierówności

$$|a^w - a^v| \leqslant a^v|a^{w-v} - 1| \leqslant a^v(A-1)|w-v|, \qquad |w-v| \leqslant 1.$$

4. Własności potęg o wykładnikach niewymiernych

Następujące własności są prawdziwe dla potęg o podstawach rzeczywistych, dodatnich a i b, oraz o wykładnikach będących liczbami niewymiernymi x, y:

1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$,
2) $(a^x)^y = a^{(x\cdot y)}$,
3) $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$.

Dla $x > y$, zachodzi ponadto:

4a) $a^x > a^y, \qquad a > 1$
4b) $a^x < a^y, \qquad a < 1$,
5) $a^x > 0$.

Z twierdzenia o arytmetyce granic i pierwszej oraz trzeciej właściwości potęg o liczbach wymiernych wnioskujemy bezpośrednio punkty: pierwszy i trzeci. Teraz przedstawimy dowód punktu drugiego:

Dowód własności 2). Zbadajmy iloraz potęg o podstawach rzeczywistych i wykładnikach wymiernych będących wyrazami ciągów $\{w_m\}$ i $\{u_n\}$. Niech ciągi te dążą odpowiednio do W oraz U przy n i m dążących do nieskończoności. Mamy więc z własności potęg o wykładnikach wymiernych:

$$1 = \frac{a^{(u_n \cdot w_m)}}{(a^{u_n})^{w_m}}.$$

Przechodząc do granicy względem n i korzystając z twierdzeń z wykładu oraz własności potęg o wykładnikach wymiernych, otrzymamy

$$1 = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{u_n \cdot w_m}}{(a^{u_n})^{w_m}} = \frac{a^{U\cdot w_m}}{(a^U)^{w_m}}.$$

Następnie, przechodząc do granicy względem m, mamy

$$1 = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{(U\cdot w_m)}}{(a^U)^{w_m}} = \frac{a^{U\cdot W}}{(a^U)^W},$$

czyli $(a^U)^W = a^{U\cdot W}$. □

Dowód własności 4). W tym dowodzie posłużymy się analogiczna własnością dla podstaw wymiernych. Niech $a > 1$. Z aksjomatu ciągłości wiem, że pomiędzy x i y leżą dwie różne liczby wymierne. Nazwijmy je D i E. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $D > E$. Niech ciąg rosnący w_n dąży do x, a malejący u_m dąży do y. Wtedy mamy

$$a^{w_n} < a^E < a^D < a^{u_m}$$

dla dostatecznie dużych m i n. Po przejściu do granicy mamy: $a^x \leqslant a^E < a^D \leqslant a^y$. Dla $a < 1$ dowód jest analogiczny.

□

Dwowód własności 5). Własnośc piąta jest prawdziwa ponieważ, dla wszystkich liczb wymiernych potęga o wykładniku wymiernym jest większa od zera. Gdy do zdefiniowania potęgi o wykładniku niewymiernym a^x wybierzemy ciąg w_n o wyrazach rosnących, to

$$a^x = \lim_{n\to\infty} a^{w_n} > a^{w_1} > 0.$$

□

5. Podsumowanie, własności dodatkowe

Jeśli zebrać wszystkie podane wyżej definicje, otrzymamy definicję potęgi o podstawie a, która jest dowolną liczbą rzeczywistą i wykładniku bedącym dowolną liczbą rzeczywistą.

Warto zauważyć, że własności potęg wymiernych niewymiernych są identyczne. Można więc podsumować: Podane własności zachodzą dla wszystkich liczb rzeczywistych dodatnich a, b oraz dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y.

Dla podstaw rzeczywistych ujemnych można również zdefiniować pierwiastek stopnia naturalnego n, jeśli n jest nieparzyste.

5.1. Definicja. Jesli liczba rzeczywista a jest ujemna to jej pierwiastek stopnia naturalnego n, gdzie n to liczba nieparzystą definiujemy jako

$$\sqrt[n]{a} = (-1)\sqrt[n]{(-a)}.$$