Analiza B

Paweł Głowacki

Pojęcie[1] *liczby rzeczywistej* uważać będziemy za intuicyjnie oczywiste. Tym niemniej celowe wydaje się przypomnienie i ugruntowanie niektórych fundamentalnych własności liczb rzeczywistych.

W zbiorze liczb rzeczywistych, który będziemy oznaczać przez $\boldsymbol{R}$, na szczególną uwagę zasługują *liczby wymierne*, czyli liczby postaci $\frac{p}{q}$, gdzie p i q są liczbami całkowitymi i $q \neq 0$. Będziemy używać oznaczeń $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Z}$ i $\boldsymbol{Q}$ odpowiednio na zbiory liczb naturalnych, całkowitych i wymiernych.

Geometrycznie wyobrażamy sobie liczby rzeczywiste jako oś liczbową, której punktem początkowym jest 0. Dlatego $\boldsymbol{R}$ często nazywamy prostą rzeczywistą.

Z algebraicznego punktu widzenia $\boldsymbol{R}$ stanowi *ciało*, bo określone są w nim dwa działania

$$(x, y) \to x + y, \quad (x, y) \to x \cdot y,$$

zwane odpowiednio dodawaniem i mnożeniem, o następujących własnościach. Dodawanie jest łączne i przemienne, a elementem neutralnym jest liczba 0. Ponadto, każdy element $x \in \boldsymbol{R}$ posiada element przeciwny. Mnożenie jest łączne i przemienne, a elementem neutralnym jest jedność. Różne od zera elementy $\boldsymbol{R}$ posiadają element odwrotny. Wreszcie mnożenie jest rozdzielne względem dodawania.

Łatwo zauważyć, że wszystkie powyższe własności posiadają także liczby wymierne. Zatem i $\boldsymbol{Q}$ jest ciałem. Nie są natomiast ciałami ani $\boldsymbol{Z}$, ani $\boldsymbol{N}$.

Zbiór liczb rzeczywistych jest liniowo uporządkowany. Oznacza to, że istnieje w nim relacja porządku $\leqslant$, taka że dla dowolnych $x, y \in \boldsymbol{R}$ jest $x \leqslant y$ lub $y \leqslant x$. Relacja ta jest zgodna z działaniami algebraicznymi w tym sensie, że zostaje zachowana, gdy do obu stron nierówności dodamy tę samą liczbę lub pomnożymy je przez tę samą liczbę dodatnią.

Zbiór liczb wymiernych jest zbiorem przeliczalnym, czyli równolicznym ze zbiorem liczb naturalnych. Ponadto jest gęstym podzbiorem $\boldsymbol{R}$. Rozumiemy przez to, że dla każdych rzeczywistych $x < y$, istnieje liczba wymierna w, taka że

$$x < w < y.$$

Innymi słowy, każdy otwarty przedział prostej rzeczywistej zawiera przynajmniej jedną liczbę wymierną. Oczywiście stąd natychmiast wynika, że jest ich w istocie w każdym przedziale nieskończenie wiele. Pozostawiamy to naszemu Czytelnikowi jako pierwsze – a więc ważne – ćwiczenie.

Ciało liczb rzeczywistych posiada istotną własność, której nie ma ciało liczb wymiernych.

Własność ciągłości. Niech będzie dany ograniczony od góry zbiór $E \subset \boldsymbol{R}$. Wśród liczb ograniczających E od góry jest zawsze liczba najmniejsza.

Nazywa się ją kresem górnym zbioru E, a wypowiedzianą własność – *własnością kresu* lub *aksjomatem ciągłości*. Będziemy o tym mówić bardziej szczegółowo już w pierwszym rozdziale. Wymienione własności liczb rzeczywistych mogą wydać się zrazu bardzo proste

[1]Serdecznie dziękuję pani Agnieszce Kazun za trud włożony w przepisanie i redakcję znacznej części niniejszego skryptu.

i oczywiste, ale takimi nie są. W trakcie wykładu uważny Czytelnik przekona się, że na nich wspiera się cały gmach analizy matematycznej.

1. Indukcja matematyczna, nierówności i kresy

Przystępujemy obecnie do właściwego wykładu. Dla dowolnej liczby $x \in \boldsymbol{R}$ określamy jej *moduł* (lub *wartość bezwzględną*) wzorem

$$|x| = \begin{cases} x & \text{dla } x \geqslant 0; \\ -x & \text{dla } x < 0, \end{cases}$$

lub równoważnie

$$|x| = \max\{x, -x\}.$$

Funkcja wartości bezwzględnej spełnia warunek trójkąta

$$|x+y| \leqslant |x| + |y|, \qquad x, y \in \boldsymbol{R},$$

przy czym równość zachodzi, wtedy i tylko wtedy gdy $xy \geqslant 0$. Stąd natychmiast wynika nierówność

$$\Big| |x| - |y| \Big| \leqslant |x-y|, \qquad x, y \in \boldsymbol{R}.$$

Moduł liczby x można interpretować jako jej odległość od zera na osi liczbowej, zaś $|x-y|$ jako odległość x od y. Pamiętając, że środek odcinka $[x, y]$ to punkt $\frac{x+y}{2}$, możemy wyrazić większą z liczb x, y wzorem

$$\max\{x, y\} = \frac{x+y}{2} + \frac{|x-y|}{2},$$

a mniejszą

$$\min\{x, y\} = \frac{x+y}{2} - \frac{|x-y|}{2}.$$

Częścią całkowitą liczby rzeczywistej x nazywamy największą liczbę całkowitą n taką, że $n \leqslant x$ i oznaczamy ją przez $[x]$. Innymi słowy,

$$[x] = \max\{n \in \boldsymbol{Z} \colon n \leqslant x\}.$$

Warto też zapamiętać, że $[x]$ to jedyna liczba całkowita n, taka że

$$n \leqslant x < n+1.$$

Dlatego jeśli $x \in [n, n+1)$ dla pewnego $n \in \boldsymbol{Z}$, to $[x] = n$; w szczególności, jeśli $x \in \boldsymbol{Z}$, to $[x] = x$. Zauważmy również, że każdą liczbę rzeczywistą x można jednoznacznie przedstawić w postaci

$$x = [x] + \mathbf{m}(x),$$

gdzie $\mathbf{m}(x) \in [0, 1)$. Liczbę $\mathbf{m}(x) = x - [x]$ nazywamy *mantysą* liczby x.

Obecnie omówimy zasadę indukcji matematycznej. Indukcja matematyczna jest metodą dowodzenia własności liczb naturalnych. Niech $T(n)$ orzeka pewną własność liczby naturalnej n. Zasada *indukcji matematycznej* mówi, że jeśli

$$\exists n_0 \in \boldsymbol{N} \quad T(n_0)$$

oraz

$$\forall n \geqslant n_0 \quad T(n) \Rightarrow T(n+1),$$

to prawdziwe jest twierdzenie

$$\forall n \geqslant n_0 \quad T(n).$$

Tak więc dowód indukcyjny przebiega w dwóch etapach. Pierwszy polega na sprawdzeniu warunku początkowego, drugi nazwiemy krokiem indukcyjnym. Zilustrujmy teraz zasadę indukcji matematycznej.

Symbolem Newtona nazywamy wyrażenie

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Czytelnik zapewne pamięta, że liczba $\binom{n}{k}$ to ilość sposobów wyboru k elementów ze zbioru n-elementowego.

1.1 (wzór dwumienny Newtona). *Dla dowolnych liczb $a, b \in \boldsymbol{R}$ oraz dowolnego $n \in \boldsymbol{N}$ zachodzi równość*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Dowód. Możemy bez straty ogólności założyć, że $b \neq 0$. Dzieląc wzór Newtona obustronnie przez b^n i oznaczając $x = \frac{a}{b}$, otrzymujemy

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

i tego wzoru będziemy dowodzić.

Sprawdzenie warunku początkowego dla $n = 1$ nie nastręcza żadnych trudności. Aby wykonać krok indukcyjny, załóżmy, że wzór obowiązuje dla pewnego $n \geqslant 1$. Wtedy

$$\begin{aligned}
(1+x)^{n+1} &= (1+x)(1+x)^n = (1+x) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) x^k + x^{n+1} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} x^k + x^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k,
\end{aligned} \tag{1.2}$$

bo

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}.$$

Tym samym zakończyliśmy dowód. □

Zauważmy mimochodem, że wzór ten pozwala łatwo uzasadnić następującą nierówność Bernoulliego:

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx, \qquad x \geqslant 0.$$

Rzeczywiście,

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = 1 + nx + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^k \geqslant 1 + nx,$$

gdyż dla $x \geqslant 0$ oczywiście $\sum\limits_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^k \geqslant 0$. Jak zobaczymy za chwilę, ta prosta nierówność ma daleko idące uogólnienia. A na razie zauważmy, że z nierówności Bernoulliego wynika, że

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geqslant 2$$

dla każdego naturalnego n. Zaraz też zobaczymy, że

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3, \qquad n \in \boldsymbol{N}, \tag{1.3}$$

co wcale nie jest już takie oczywiste.

Niech q będzie ustaloną liczbą. Bez trudu przekonujemy się, że

$$(1-q)(1+q+q^2+\cdots+q^n) = 1-q^{n+1}.$$

Jeśli ponadto $q \neq 1$, dzieląc obie strony przez $1-q$, otrzymujemy

$$1+q+q^2+\cdots+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q},$$

czyli znany wzór na *sumę postępu geometrycznego*. Skorzystamy teraz z tego wzoru, jak również i rozwinięcia dwumiennego Newtona, aby wyprowadzić zapowiedziane już oszacowanie (1.3).

Rzeczywiście,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!},$$

a ponadto

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} &= 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!} = 2+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{3\cdot 4\cdot\cdots\cdot n}\right) \\ &< 2+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^{n-2}}\right) < 2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-1/3} = \frac{11}{4} < 3.\end{aligned}$$

Średnią arymetyczną liczb $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \in \boldsymbol{R}$ nazywamy wyrażenie

$$A = \frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n};$$

średnią geometryczną liczb $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \geqslant 0$ nazywamy wyrażenie

$$G = \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n};$$

średnią harmoniczną liczb $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n > 0$ nazywamy wyrażenie

$$H = \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\ldots+\frac{1}{a_n}}.$$

Następujący lemat wykorzystamy w dowodzie twierdzenia o porównaniu średnich.

1.4. Lemat. *Niech będą dane liczby* $0 < x < 1 < y$. *Wtedy*

$$x+y > 1+xy.$$

Dowód. Po przeniesieniu wszystkich wyrazów w naszej nierówności na lewą stronę otrzymujemy wyrażenie dodatnie, gdyż

$$x+y-xy-1 = (1-x)(y-1) > 0,$$

co kończy nasz dowód. □

1.5. *Jeśli* $b_1 b_2 \dots b_n = 1$, *gdzie* $n \geqslant 2$, *i nie wszystkie z liczb* b_k *są równe* 1, *to*

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n > n.$$

Dowód. Jeśli $n = 2$, to jedna z liczb b_1, b_2 jest mniejsza, a druga większa od 1, więc na mocy Lematu 1.4

$$b_1 + b_2 > 1 + b_1 b_2 = 2, \tag{1.6}$$

co oznacza sprawdzenie warunku początkowego. Przyjmijmy teraz, że twierdzenie jest prawdziwe dla pewnego $n \in \boldsymbol{N}$. Niech $b_1 b_2 \dots b_n b_{n+1} = 1$ i niech np. $b_n < 1 < b_{n+1}$. Wtedy, ponownie korzystając z Lematu i założenia indukcyjnego zastosowanego do n liczb

$$c_1 = b_1, c_2 = b_2, \dots, c_{n-1} = b_{n-1}, c_n = b_n b_{n+1},$$

których iloczyn jest równy jedności, mamy

$$b_n + b_{n+1} > b_n b_{n+1} + 1 = c_n + 1$$

oraz

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n + b_{n+1} > c_1 + c_2 + \cdots + c_{n-1} + c_n + 1 \geqslant n + 1,$$

czego należało dowieść. □

1.7. Wniosek. *Jeśli* $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n > 0$ *nie są wszystkie sobie równe, to średnia geometryczna tych liczb jest mniejsza od ich średniej arytmetycznej:*

$$G = (a_1 a_2 a_3 \dots a_n)^{\frac{1}{n}} < \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n} = A.$$

Dowód. Przynajmniej jedna z liczb $b_k = a_k / G$ jest różna od 1, a ponadto

$$b_1 b_2 \dots b_n = 1.$$

Na mocy (1.5)

$$\frac{a_1}{G} + \frac{a_2}{G} + \cdots + \frac{a_n}{G} = b_1 + b_2 + \cdots + b_n > n,$$

czyli

$$G < A = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n},$$

a to już jest nasza teza. □

Sformułujemy teraz bardzo prostą zasadę, z której będziemy nieustannie korzystać w trakcie tego wykładu.

1.8 (zasada epsilona). *Niech* $a, b \in \boldsymbol{R}$. *Jeśli dla każdego* $\varepsilon > 0$ *zachodzi* $a < b + \varepsilon$, *to* $a \leqslant b$.

Dowód. Przypuśćmy nie wprost, że $a > b$ i weźmy $\varepsilon = \frac{a-b}{2}$. Na mocy naszych założeń powinno być $a < b + \varepsilon = \frac{a+b}{2} < a$, co jest niedorzecznością. Wobec tego musi być $a \leqslant b$. □

Symbol ε (grecka litera *epsilon*) będzie nam najczęściej służył do oznaczania bardzo małych liczb dodatnich.

1.9 (aksomat gęstości). *Każdy niepusty przedział otwarty* $I \subset \boldsymbol{R}$ *zawiera przynajmniej jedną liczbę wymierną.*

Aksjomat ten można też wyrazić tak: *Dla każdej liczby rzeczywistej a i każdego $\varepsilon > 0$ istnieje liczba wymierna w, taka że $|a - w| < \varepsilon$.* Rzeczywiście, to nowe sformułowanie mówi, że w każdym przedziale $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ znajduje się jakaś liczba wymierna. Zwróćmy uwagę, że nie mówi się tu wyraźnie, że $\varepsilon > 0$ jest mały, ale chwila zastanowienia wystarczy, aby stwierdzić, że jeśli warunek jest spełniony np. dla $0 < \varepsilon < 1$, to jest też spełniony i dla pozostałych. W gruncie rzeczy o jego prawdziwości decydują małe przedziały.

Przyjrzyjmy się teraz dokładniej wspomnianej na początku zasadzie kresu. Zacznijmy od starannej definicji.

Mówimy, że zbiór $E \subset \boldsymbol{R}$ jest ograniczony od góry, jeśli istnieje liczba $y \in \boldsymbol{R}$, taka że $x \leqslant y$ dla każdego $x \in E$. Taka liczba y nazywa się *górnym ograniczeniem* zbioru E. Jeśli y jest górnym ograniczeniem E, to oczywiście każda liczba z większa od y także jest górnym ograniczeniem tego zbioru. Zatem zbiór górnych ograniczeń E^+ jest albo pusty, albo nieskończony.

1.10 (aksjomat ciągłości). *Niech E będzie niepustym i ograniczonym od góry podzbiorem $\boldsymbol{R}$. W zbiorze E^+ liczb ograniczających E od góry istnieje element najmniejszy.*

Najmniejsze spośród górnych ograniczeń zbioru E nazywamy *kresem górnym* zbioru E i oznaczamy przez $\sup E$.

Zwróćmy uwagę, że liczba a, która jest kresem górnym zbioru E spełnia dwa warunki. Jest ona górnym ograniczeniem zbioru E i żadna liczba mniejsza od a takim ograniczeniem już nie jest. Można zapisać to formalnie tak:

$$\forall\, x \in E \quad x \leqslant a$$

oraz

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, x \in E \quad x > a - \varepsilon.$$

Dla zbioru $F \subset \boldsymbol{R}$ niech

$$F^- = \{y \in \boldsymbol{R} : \forall x \in F \quad y \leqslant x\}.$$

Z aksomatu ciągłości wynika

1.11. Wniosek. *Każdy niepusty i ograniczony z dołu zbiór $F \subset \boldsymbol{R}$ ma największe dolne ograniczenie zwane kresem dolnym, które oznaczamy przez* $\inf F$.

Dowód. Jeśli F jest zbiorem niepustym i ograniczonym od dołu, to $E = -F$ jest zbiorem niepustym i ograniczonym od góry. Nietrudno się przekonać, że $E^+ = -F^-$, co oznacza, że y jest ograniczeniem górnym E wtedy i tylko wtedy, gdy $-y$ jest ograniczeniem dolnym F. Jest też jasne, że jeśli a jest najmniejszym elementem E^+, to $-a$ jest największym elementem F^-. □

Dodajmy, że z definicji kresu i aksomatu ciągłości wynika, że dla każdego zbioru E ograniczonego od góry

$$E^+ = [a, \infty), \qquad a = \sup E,$$

i dla każdego zbioru F ograniczonego od dołu

$$F^- = (-\infty, b], \qquad b = \inf F.$$

Przyjmiemy też następującą konwencję. Jeśli zbiór E jest nieograniczony z góry, będziemy pisać $\sup E = \infty$ i mówić, że E ma *niewłaściwy kres górny.* Podobnie zbiór F nieograniczony z dołu ma *niewłaściwy kres dolny* $\inf F = -\infty$.

Powracamy do nierówności Bernoulliego.

1.12. Lemat. *Dla dowolnego* $n \in \boldsymbol{N}$ *i dowolnego* $1 \neq q > 0$

$$\frac{q^{n+1}-1}{n+1} > \frac{q^n-1}{n}.$$

Dowód. Załóżmy najpierw, że $q > 1$. Wtedy proste przekształcenia z wykorzystaniem wzoru na sumę postępu geometrycznego pokazują, że nasza nierówność jest równoważna nierówności

$$nq^{n+1} > 1 + q + q^2 \cdots + q^{n-1}, \qquad q > 1,$$

która jest oczywista. Jeśli natomiast $0 < q < 1$, to podobne rachunki prowadzą do nierówności

$$nq^{n+1} < 1 + q + q^2 \cdots + q^{n-1}, \qquad q < 1,$$

która jest też oczywista. □

1.13 (nierówność Bernoulliego). *Dla* $\alpha > 1$ *i dowolnego* $-1 < x \neq 0$ *zachodzi następująca nierówność*

$$(1+x)^\alpha > 1 + \alpha x.$$

Dowód. Dowód przeprowadzimy najpierw dla wymiernych $\alpha = \frac{m}{n}$, gdzie $m > n$. Niech

$$q = (1+x)^{1/n}.$$

Z lematu wynika, że

$$\frac{q^m-1}{m} > \frac{q^n-1}{n},$$

a stąd

$$q^m > 1 + \frac{m}{n}q^n - \frac{m}{n},$$

co po podstawieniu daje naszą tezę.

Korzystając z zasady gęstości, uzupełnimy teraz dowód nierówności Bernoulliego w przypadku $\alpha > 1$ niewymiernych. Niech będzie dana liczba $0 < \varepsilon < \alpha - 1$. Niech $w \in \boldsymbol{Q}$ należy do przedziału $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$, przy czym $(\alpha - w)x > 0$. Wtedy

$$(1+x)^\alpha > (1+x)^w > 1 + wx = 1 + \alpha x + (w - \alpha)x,$$

skąd

$$1 + \alpha x < (1+x)^\alpha + \varepsilon |x|$$

i na mocy zasady epsilona otrzymujemy

$$1 + \alpha x \leqslant (1+x)^\alpha,$$

co już niemal nas zadowala. Niemal, bo otrzymana nierówność jest słaba. Aby to poprawić, możemy postąpić tak. Niech $1 < w < \alpha$ będzie wymierne. Wtedy

$$(1+x)^\alpha = ((1+x)^w)^{\frac{\alpha}{w}} > (1+wx)^{\frac{\alpha}{w}} \geqslant 1 + \frac{\alpha}{w} \cdot wx = 1 + \alpha x,$$

tym razem już z ostrą nierównością.

□

1.14. Wniosek. *Niech będzie dana liczba rzeczywista* $\alpha > 1$. *Wówczas dla dowolnego* $y > 0$ *zachodzi nierówność*

$$(1+y)^\alpha > 1 + y^\alpha.$$

Dowód. Przyjmijmy najpierw, że $\alpha y \geqslant y^\alpha$. Wtedy na mocy nierówności Bernoulliego

$$(1+y)^\alpha > 1 + \alpha y \geqslant 1 + y^\alpha,$$

tak jak chcieliśmy.

Jeśli natomiast $\alpha y \leqslant y^\alpha$, to $y^{\alpha-1} \geqslant \alpha$ i stosując ponownie nierówność Bernoulliego widzimy, że

$$\begin{aligned}(1+y)^\alpha &= y^\alpha(1+1/y)^\alpha > y^\alpha(1+\alpha/y) \\ &= y^\alpha + \alpha y^{\alpha-1} \geqslant \alpha^2 + y^\alpha > 1 + y^\alpha,\end{aligned}$$

więc i w tym wypadku wszystko się zgadza. □

Zadania

1. Udowodnij nierówności
$$1 - a \leqslant \frac{1}{1+a} \leqslant 1 - \frac{a}{1+a}, \qquad a > 0.$$

2. Pokaż, że $x + y = \max\{x, y\} + \min\{x, y\}$.

3. Pokaż, że $|x| + |y| = \max\{|x + y|, |x - y|\}$.

4. Oblicz wartości wyrażeń: $[(1 - \frac{1}{n})^n]$, $[n + n^{-1}]$, gdzie $n \in \boldsymbol{N}$.

5. Wykaż, że jeśli $x \notin \boldsymbol{Z}$, to
$$[-x] = -[x] - 1, \qquad \mathbf{m}(-x) = 1 - \mathbf{m}(x).$$

6. Niech $x, y \in \boldsymbol{R}$. Udowodnij nierówności
$$[x + y] \geqslant [x] + [y], \qquad \left[\frac{x}{2}\right] \leqslant \frac{[x]}{2}, \qquad [-x] \leqslant -[x].$$

7. Rozwiąż równanie $[2x] = 3[x]$.

8. Pokaż, że $\mathbf{m}(x) = \mathbf{m}(y)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x - y \in \boldsymbol{Z}$.

9. Pokaż, że $\mathbf{m}(nx) = \mathbf{m}(n\mathbf{m}(x))$.

10. Pokaż, że jeśli $\mathbf{m}(x) < \frac{1}{N}$, to $\mathbf{m}(Nx) = N\mathbf{m}(x)$.

11. Wiadomo, że $\mathbf{m}(x) > 1 - 1/N$. Pokaż, że $N\mathbf{m}(x) - \mathbf{m}(Nx) = N - 1$.

12. Niech $1 \leqslant k < n$ będą naturalne. Udowodnij, że $k(n - k) \geqslant n - 1$.

13. Udowodnij tożsamość Pascala
$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}.$$

14. Dane są liczby naturalne $m \leqslant n - 2$. Pokaż, że
$$\Big(m + 1\Big)^{n-m} < \frac{n!}{m!}.$$

15. Korzystając ze wzoru dwumiennego Newtona, wykaż, że $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = 3^n$.

16. Wykaż, że $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ oraz $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$.

17. Dane są liczby $a_0, a_1, \ldots, a_N$, takie że $a_0 = 1$ i $a_{n+1} = 2a_n + 1$ dla $0 \leqslant n < N$. Pokaż przez indukcję, że $a_{n+1} = a_n + 2^{n+1}$ i znajdź a_N.

18. Dla $a, b \in \boldsymbol{R}$ wyprowadź tożsamość
$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a - b) \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}.$$

19. Korzystając z gęstości liczb wymiernych wśród rzeczywistych, pokaż, że każdy przedział $\emptyset \neq (a, b) \subset \boldsymbol{R}$ zawiera nieskończenie wiele liczb wymiernych.

20. Wiedząc, że $a + b > 2$, wykaż, że $a^2 + b^2 > 2$.

21. Wykaż, że dla dowolnych $a, b, c, d > 0$
$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} \geqslant 4.$$

22. Udowodnij przez indukcję nierówność
$$(1 + x)^n \geqslant 1 + nx + (n - 1)x^2$$
dla $x > -1$ i $n \in \boldsymbol{N}$.

23. Korzystając z nierówności Bernoulliego, pokaż, że

$$(1+x)^\beta < 1+\beta x, \qquad 0<\beta<1, \quad x>-1.$$

24. Pokaż, że

$$(1+x)^\beta < 1+x^\beta, \qquad x>0, \ \ 0<\beta<1.$$

25. Korzystając z nierówności Bernoulliego, pokaż, że

$$\Big(1-\frac{1}{na+1}\Big)^n < 1-\frac{1}{a+1}$$

dla $a>0$ i $n \in \boldsymbol{N} \setminus \{1\}$.

26. Pokaż, że

$$\big(1+\frac{1}{n}\big)^a < 1+\frac{a}{n}, \qquad 0<a<1.$$

27. Pokaż, że

$$\big(u+v\big)^a < u^a+v^a, \qquad u,v>0, \ 0<a<1.$$

28. Korzystając z nierówności Bernoulliego, pokaż, że

$$\sqrt[n]{a}-1 \leqslant \frac{a-1}{n}, \qquad a>1.$$

29. Znajdź najmniejszą wartość funkcji $f(x) = \sum_{k=-n}^{n} x^k$ na półprostej $x>0$ i punkt, w którym funkcja przyjmuje tę wartość.

30. Wykaż, że dla $a,b,c>0$

$$\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b} \geqslant 6.$$

31. Znajdź największą wartość funkcji $f(x,y)=xy$ na elipsie $\frac{x^2}{2}+2y^2=1$ i punkty, w których funkcja przyjmuje tę wartość.

32. Wykaż, że średnia harmoniczna jest zawsze nie większa od średniej geometrycznej tych samych liczb, a równość zachodzi tylko wtedy, gdy wszystkie liczby a_k są identyczne.

33. Udowodnij nierówność

$$\frac{a^6+b^9}{4} \geqslant 3a^2b^3-16$$

dla $a \in \boldsymbol{R}$ i $b \geqslant 0$.

34. Niech L będzie obwodem, a P polem trójkąta. Udowodnij nierówność $L^2>16P$ lub nawet $L^2 > 4\sqrt{27}P$.

35. Niech $a \in \boldsymbol{R}, b>0$. Uzasadnij nierówność

$$\frac{a}{b} \leqslant a^2+\frac{1}{4b^2}.$$

36. Niech $a,b,c \geqslant 0$. Udowodnij, że

$$\sqrt[3]{abc}+\sqrt[3]{bcd}+\sqrt[3]{cda}+\sqrt[3]{dab} \leqslant a+b+c+d.$$

37. Niech $m,n \in \boldsymbol{N}$. Pokaż, że

$$m(n-m) \leqslant \frac{n^2}{4},$$

przy czym równość jest zrealizowana tylko wtedy, gdy n jest parzyste.

38. Dane są liczby $a, b \in \boldsymbol{R}$ i liczba dodatnia $A > 0$ spełniające warunek

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad a < b + A\varepsilon.$$

Korzystając z zasady epsilona, pokaż, że $a \leqslant b$.

39. Dane są liczby $a, b \in \boldsymbol{R}$ i liczba dodatnia $A > 0$. Sprawdź, że

$$(\forall \varepsilon > 0 \quad a < b + A\varepsilon) \quad \iff \quad (\forall \varepsilon > 0 \quad a \leqslant b + A\varepsilon) \quad \iff \quad a \leqslant b.$$

40. Udowodnij, że każdy ograniczony od dołu zbiór liczb rzeczywistych E ma kres dolny, tzn. że w zbiorze E^- liczb ograniczających E od dołu istnieje element maksymalny.

41. Wykaż, że jeśli $x \leqslant y$ dla każdych $x \in A$, $y \in B$, to $\sup A \leqslant \inf B$. Czy prawdziwe jest wynikanie odwrotne?

42. Wykaż, że $\emptyset \neq A \subset B$ pociąga $\sup A \leqslant \sup B$ oraz $\inf B \leqslant \inf A$.

43. Udowodnij, że jeśli A, B są ograniczone, to

$$\sup(-A) = -\inf A, \qquad \sup(A + B) = \sup A + \sup B$$

oraz

$$\inf(A + B) = \inf A + \inf B.$$

44. Pokaż, że w zbiorze liczb dodatnich nie ma elementu minimalnego.

45. Oblicz

$$\inf\left\{\frac{1}{n} : n \in \boldsymbol{N}\right\}, \qquad \sup\left\{\frac{1}{n} : n \in \boldsymbol{N}\right\}, \qquad \inf\left\{\frac{n-1}{n} : n \in \boldsymbol{N}\right\}.$$

46. Udowodnij, że jeśli A i B są zbiorami ograniczonymi, to

$$\sup A - \inf B = \sup(A - B),$$

gdzie

$$A - B = \{x - y : x \in A,\ y \in B\}.$$

47. Rozstrzygnij, która z liczb $a = 3^{\sqrt{2}}$ czy $b = 1 + 2^{\sqrt{2}}$ jest większa.

48. Rozstrzygnij, która z liczb $a = 4^{1/\sqrt{2}}$ czy $b = 1 + 3^{1/\sqrt{2}}$ jest większa.

49. Dla jakich $x > 0$ liczba

$$A(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x + \left(\frac{3}{4}\right)^x$$

jest większa od 1?

50. Oblicz $\left[(1 + \frac{1}{n})^n\right]$.

51. Pokaż, że

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} < \frac{49}{18}, \qquad n \geqslant 3.$$

52. Wiedząc, że $a, b \geqslant 0$ oraz $a \leqslant b + \sqrt{a}$, pokaż, że $\sqrt{a} \leqslant 1 + \sqrt{b}$. W tym celu rozpatrz nierówność kwadratową $x^2 - x - b \leqslant 0$, gdzie $x = \sqrt{a}$.