2. Nieskończone ciągi liczbowe

Ciągiem liczbowym nazywamy funkcję

$$a\colon \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{R}.$$

Wartości tej funkcji oznaczamy przez $a(n) = a_n$ i nazywamy *wyrazami ciągu*. Często ciąg oznaczamy przez $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ lub po prostu przez $\{a_n\}$.

Prostymi przykładami ciągów są:

$$a_n = n, \qquad b_n = n^2, \qquad c_n = [\sqrt{n}], \qquad d_n = \log(1+n).$$

Nie zawsze jednak można zadać ciąg jawnym wzorem.

2.1. Przykład. Ciekawym przykładem takiego ciągu jest ciąg $\{w_n\}$, którego zbiór wartości pokrywa się ze zbiorem liczb wymiernych dodatnich:

$$\frac{1}{1}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{2}{1}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{2}{2}, \quad \frac{3}{1}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{4}{1}, \quad \frac{1}{5} \quad \frac{2}{4}, \quad \frac{3}{3}, \quad \frac{4}{2}, \quad \frac{5}{1}, \quad \dots$$

Zasada tworzenia kolejnych wyrazów tego ciągu jest taka: Wypisujemy kolejno bloki B_k liczb postaci p/q o stałej sumie $p + q = k + 1$. Jak widać,

$$B_k = \Big\{\frac{1}{k}, \frac{2}{k-1}, \dots, \frac{k-1}{2}, k\Big\}.$$

Tak więc

$$B_1 = \Big\{1\Big\}, \; B_2 = \Big\{\frac{1}{2}, 2\Big\}, \; B_3 = \Big\{\frac{1}{3}, 1, 3\Big\}, \; B_4 = \Big\{\frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, 4\Big\}, \; B_5 = \Big\{\frac{1}{5}, \frac{1}{2}, 1, 2, 5\Big\}, \; \dots$$

Następnie ustawiamy bloki w kolejności ich numeracji i otrzymanym wyrazom nadajemy kolejne numery. Jest to tzw. przekątniowa metoda numeracji liczb wymiernych. Zwróćmy uwagę, że porządek występowania w ciągu kolejnych liczb wymiernych nie ma nic wspólnego z ich uporządkowaniem na prostej liczbowej. Widać też, że tak otrzymany ciąg nie jest różnowartościowy. Jest jednak surjektywny, bo dowolna liczba dodatnia postaci $w = p/q$ znajdzie się w bloku B_{p+q-1}.

Jeśli teraz zbudujemy nowe bloki

$$B'_k = B_k \setminus \bigcup_{j<k} B_j,$$

to utworzą one nowy ciąg $\{w'_n\}$:

$$\frac{1}{1}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{2}{1}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{3}{1}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{4}{1}, \quad \frac{1}{5}, \quad \frac{5}{1}, \quad \dots,$$

który będzie wzajemnie jednoznacznym przekształceniem zbioru $\boldsymbol{N}$ na zbiór $\boldsymbol{Q} \cap (0, \infty)$.

Ciąg $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazywamy *ograniczonym od góry*, jeśli istnieje $M \in \boldsymbol{R}$, takie że

$$a_n \leqslant M, \qquad n \in \boldsymbol{N},$$

a *ograniczonym od dołu*, jeśli istnieje $m \in \boldsymbol{R}$, takie że

$$m \leqslant a_n, \qquad n \in \boldsymbol{N}.$$

Ciąg $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazywa się *ograniczony*, jeśli jest ograniczony od góry i od dołu, tzn. jeśli

$$|a_n| \leqslant K, \qquad n \in \boldsymbol{N},$$

dla pewnego $K \in \boldsymbol{R}$.

Dla przykładu popatrzmy na ciąg

$$e_n = \big(1 + \frac{1}{n}\big)^n.$$

Wiemy, że $2 \leqslant e_n < 3$, a zatem liczba 2 jest ograniczeniem (a nawet kresem) dolnym zbioru wyrazów ciągu $\{e_n\}$, a liczba 3 ograniczeniem górnym, ale nie kresem górnym. Jak zobaczymy wkrótce istnieją inne (znacznie mniejsze) ograniczenia tego zbioru.

Ciąg $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazywa się *rosnący*, jeśli

$$a_n \leqslant a_{n+1}, \qquad n \in \boldsymbol{N},$$

a *malejący*, jeśli

$$a_{n+1} \leqslant a_n, \qquad n \in \boldsymbol{N}.$$

Jeśli w powyższych definicjach słabe nierówności można zastąpić ostrymi, wtedy ciąg nazywa się odpowiednio *ściśle rosnący* lub *ściśle malejący*.

2.2. Przykład. Dobrze nam znanym przykładem ciągu ściśle rosnącego jest ciąg o wyrazie

$$a_n = \frac{q^n - 1}{n},$$

gdzie $q > 0$ i $q \neq 1$.

2.3. Przykład. Pokażemy, że ciąg $e_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ jest ściśle rosnący. Rzeczywiście, na mocy nierówności Bernoulliego

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= \Big(1 + \frac{1}{n+1}\Big)^{n+1} = \Big[\Big(1 + \frac{1}{n+1}\Big)^{\frac{n+1}{n}}\Big]^n \\ &> \Big[1 + \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{n+1}\Big]^n = \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n = e_n. \end{aligned} \tag{2.4}$$

A oto najważniejsze pojęcie tego wykładu. Mówimy, że liczba g jest *granicą ciągu liczbowego* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, jeśli w każdym przedziale otwartym zawierającym g znajdują się prawie wszystkie wyrazy ciągu (tzn. wszystkie poza, być może, skończoną ilością).

Definicję tę możemy zapisać również tak:

$$g = \lim_{n\to\infty} a_n \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists M \in \boldsymbol{R} \quad \forall n > M \quad |a_n - g| < \varepsilon.$$

2.5. *Uwaga.* Jeśli w ciągu $\{a_n\}$ zmienimy, usuniemy lub dodamy skończoną ilość wyrazów, to nie będzie to miało żadnego wpływu ani na zbieżność ciągu ani na wartość granicy.

2.6. *Uwaga.* Jeśli $c > 0$ jest pewną stałą, to występujący w definicji warunek

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M \in \boldsymbol{R} \quad \forall n > M \quad |a_n - g| < \varepsilon$$

jest równoważny następującemu:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M \in \boldsymbol{R} \quad \forall n > M \quad |a_n - g| < c \cdot \varepsilon.$$

Jest on także równoważny warunkowi

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M \in \boldsymbol{R} \quad \forall n > M \quad |a_n - g| < \sqrt{\varepsilon}$$

i innym podobnym. Z tego powodu mówi się czasem o „elastyczności epsilona”.

2.7. Przykład. Pokażemy, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Istotnie, dla ustalonego $\varepsilon > 0$ nierówność $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$ zachodzi dla wszystkich $n > \frac{1}{\varepsilon}$.

2.8. Przykład. Pokażemy z definicji, że

$$b_n = \frac{3n+4}{15n-1} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{5}.$$

Ustalmy dowolnie liczbę $\varepsilon > 0$. Chcemy pokazać, że dla dostatecznie dużych n zachodzi nierówność

$$\left| b_n - \frac{1}{5} \right| < \varepsilon.$$

Ponieważ

$$\left| \frac{3n+4}{15n-1} - \frac{1}{5} \right| = \left| \frac{21}{5(15n-1)} \right| = \frac{21}{5(15n-1)},$$

więc, jak łatwo obliczyć, $\left| b_n - \frac{1}{5} \right| < \varepsilon$ dla $n > \frac{21+5\varepsilon}{75\varepsilon}$.

2.9. Przykład. Pokażemy, że ciąg stały o wyrazach $a_n = c$ ma granicę równą c. Rzeczywiście, jeśli ustalimy dowolnie $\varepsilon > 0$, to nierówność

$$|a_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$$

jest spełniona dla każdego $n \in \boldsymbol{N}$.

2.10. Przykład. Zauważmy, że

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0,$$

gdyż $|a_n - 0| = \big| |a_n| - 0 \big|$.

Wprost z definicji wynika następujący wniosek.

2.11. Wniosek. *Jeżeli $a_n \to a$ i $b_n \to b$ oraz $a_n \leqslant b_n$ dla $n \in \boldsymbol{N}$, to $a \leqslant b$.*

Nieco dalej idzie ważny lemat o trzech ciągach.

2.12. Lemat (o trzech ciągach). *Jeśli ciągi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ są zbieżne do tej samej granicy $g \in \boldsymbol{R}$, a ciąg $\{x_n\}$ ma własność*

$$\forall n \in \boldsymbol{N} \quad a_n \leqslant x_n \leqslant b_n,$$

to $\{x_n\}$ jest również zbieżny do g.

Dowód. Niech $\varepsilon > 0$. Ponieważ $\lim a_n = g$, więc istnieje $N_1 \in \boldsymbol{N}$, takie że jeśli $n \geqslant N_1$, to $|a_n - g| < \varepsilon$, czyli $g - \varepsilon < a_n < g + \varepsilon$. Podobnie dla ciągu $\{b_n\}$ istnieje $N_2 \in \boldsymbol{N}$, takie że $g - \varepsilon < b_n < g + \varepsilon$ dla $n \geqslant N_2$. Wtedy dla każdego $n \geqslant N_3 = \max\{N_1, N_2\}$ mamy

$$g - \varepsilon < a_n \leqslant x_n \leqslant b_n < g + \varepsilon,$$

czyli

$$|x_n - g| < \varepsilon,$$

co oznacza, że ciąg $\{x_n\}$ również zbiega do g. $\square$

2.13. *Uwaga.* Oczywiście w twierdzeniu tym wystarczy założyć, że nierówność

$$a_n \leqslant x_n \leqslant b_n$$

zachodzi dla prawie wszystkich $n \in \boldsymbol{N}$, gdyż (jak zauważyliśmy wcześniej) skończona ilość wyrazów ciągu nie ma wpływu na istnienie i wartość jego granicy.

2.14. Wniosek. *Jeśli $a_n \to 0$ oraz $0 \leqslant b_n \leqslant a_n$ dla $n \in \boldsymbol{N}$, to również $b_n \to 0$.*

2.15. *Każdy ciąg zbieżny jest ograniczony.*

Dowód. Weźmy dowolny ciąg zbieżny

$$a_n \xrightarrow{n\to\infty} a \in \boldsymbol{R}.$$

Wtedy istnieje liczba $N \in \boldsymbol{N}$, taka że jeśli $n \geqslant N$, to $|a_n - a| < 1$. Ponieważ

$$\big||a_n| - |a|\big| \leqslant |a_n - a|,$$

więc

$$|a_n| < |a| + 1, \qquad n \geqslant N.$$

Zatem

$$|a_n| < \max\{|a| + 1, |a_1|, |a_2|, |a_3|, \ldots, |a_{N-1}|\}, \qquad n \in \boldsymbol{N},$$

czyli $\{a_n\}$ jest ograniczony. $\square$

Zauważmy, że implikacja w drugą stronę oczywiście nie jest prawdziwa. Jako przykład rozważmy ciąg o wyrazach $a_n = (-1)^n$. Jest on ograniczony, bo $|a_n| \leqslant 1$, ale nie jest zbieżny. Przypuśćmy bowiem, że $a_n \to g$, gdy $n \to \infty$, dla pewnego $g \in \boldsymbol{R}$. Wtedy istniałaby taka liczba $N \in \boldsymbol{N}$, że $|a_n - g| < 1$ dla $n \geqslant N$. Dla takich n mielibyśmy więc

$$|a_{n+1} - a_n| = |(-1)^{n+1} - (-1)^n| = 2$$

i jednocześnie

$$|a_{n+1} - a_n| = |a_{n+1} - g + g - a_n| \leqslant |a_{n+1} - g| + |g - a_n| < 2,$$

co nie jest możliwe.

Mówimy, że ciąg jest *rozbieżny*, jeśli nie ma granicy liczbowej. Mówimy, że ciąg $\{a_n\}$ jest *rozbieżny do nieskończoności* (*ma granicę niewłaściwą równą* ∞) i piszemy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty,$$

jeśli dla każdej liczby dodatniej $K \in \boldsymbol{R}$ prawie wszystkie wyrazy ciągu są większe niż K; innymi słowy, jeśli istnieje $M > 0$, takie że

$$a_n > K \text{ dla } n > M.$$

Mówimy, że $\{a_n\}$ jest *rozbieżny do* $-\infty$ (*ma granicę niewłaściwą równą* $-\infty$) i piszemy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty,$$

jeśli dla każdej liczby dodatniej $K \in \boldsymbol{R}$ prawie wszystkie wyrazy ciągu są mniejsze niż $-K$; innymi słowy, jeśli istnieje $M > 0$, takie że

$$a_n < -K \text{ dla } n > M.$$

2.16. Przykład. Ciąg o wyrazach $a_n = n^\alpha$, gdzie $\alpha > 0$, jest rozbieżny do ∞. Istotnie, dla dowolnej liczby $M > 0$, nierówność $a_n > M$ zachodzi dla wszystkich $n > M^{1/\alpha}$.

2.17. Przykład. Ustawiając metodą przekątniową wszystkie liczby wymierne w ciąg nieskończony, otrzymamy przykład ciągu, który nie jest ograniczony, zatem nie jest też zbieżny. Ciąg ten nie ma nawet granicy niewłaściwej.

2.18. *Niech będą dane dwa ciągi* $\{a_n\}$ *i* $\{b_n\}$. *Jeśli* $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ *oraz dla prawie wszystkich* $n \in \boldsymbol{N}$ $a_n \geqslant b_n$, *to również* $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

2.19. Przykład. Ponieważ $2^n \geqslant n$ dla wszystkich $n \in \boldsymbol{N}$, więc

$$\lim_{n\to\infty} 2^n = \infty.$$

2.20. *Niech $\{a_n\}$ będzie ciągiem liczbowym. Wtedy*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty}(-a_n) = -\infty.$$

Przykładami ciągów rozbieżnych do $-\infty$ są więc

$$\{-n\}_{n\in\boldsymbol{N}},\ \{-2^n\}_{n\in\boldsymbol{N}},\ \{-n\cdot 2^n\}_{n\in\boldsymbol{N}}.$$

2.21. *Jeśli $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, to $\lim_{n\to\infty} |x_n| = |x|$.*

Dowód. Dla dowodu wystarczy zauważyć, że $\big||x_n| - |x|\big| \leqslant |x_n - x|$. □

2.22. Twierdzenie (arytmetyka granic). *Niech $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ będą ciągami liczbowymi. Jeśli*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \text{ oraz } \lim_{n\to\infty} b_n = b,$$

to

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b, \qquad \lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = ab.$$

Jeśli ponadto $b \neq 0$ i $b_n \neq 0$ dla każdego $n \in \boldsymbol{N}$, to

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}.$$

Dowód. Niech $\varepsilon > 0$. Z tego, że $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ i $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ wynika, że istnieje $N \in \boldsymbol{N}$, takie że

$$|a_n - a| < \varepsilon \text{ oraz } |b_n - b| < \varepsilon, \quad \text{gdy } n \geqslant N.$$

Zatem nierówność

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \leqslant |a_n - a| + |b_n - b| < 2\varepsilon$$

jest spełniona dla $n \geqslant N$, co dowodzi pierwszej własności.

Ponieważ ciąg $\{a_n\}$ jako zbieżny jest ograniczony, więc $|a_n| \leqslant K$ dla pewnego $K > 0$ i wszystkich n. Zatem

$$\begin{aligned}
|a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \\
&\leqslant |a_n| \cdot |b_n - b| + |a_n - a| \cdot |b| \\
&< K \cdot \varepsilon + |b| \cdot \varepsilon = (K + |b|) \cdot \varepsilon,
\end{aligned}$$

co potwierdza drugą własność.

Na mocy (2.21) mamy

$$\lim_{n\to\infty} |b_n| = |b|,$$

a stąd istnieje N_1, takie że

$$|b_n| > \frac{|b|}{2}, \qquad n \geqslant N_1.$$

Niech $\varepsilon > 0$. Wobec zbieżności ciągu $\{b_n\}$

$$|b_n - b| < \varepsilon, \qquad n \geqslant N_2.$$

Stąd dla każdego $n \geqslant N = \max\{N_1, N_2\}$ mamy

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b - b_n|}{|b_n| \cdot |b|} < \frac{\varepsilon}{\frac{|b|}{2} \cdot |b|} = \frac{2}{|b|^2} \cdot \varepsilon.$$

Tym samym dowód został zakończony. □

2.23. Wniosek. *Jeśli* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$*, to dla każdego* $\alpha \in \boldsymbol{R}$

$$\lim_{n\to\infty} \alpha \cdot a_n = \alpha \cdot a.$$

Jeśli ponadto $\lim_{n\to\infty} b_n = b \neq 0$ *i* $b_n \neq 0$*, to*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$$

Przez indukcję łatwo wyprowadzamy następujący wniosek.

2.24. Wniosek. *Niech będą dane zbieżne ciągi* $\{a_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}$*, gdzie* $1 \leqslant k \leqslant N$*. Wtedy*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{N} a_n^{(k)} = \sum_{k=1}^{N} \lim_{n\to\infty} a_n^{(k)}$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{N} a_n^{(k)} = \prod_{k=1}^{N} \lim_{n\to\infty} a_n^{(k)}.$$

2.25. Przykład. Rozważmy ciąg geometryczny $\{q^n\}$, gdzie $q > 0$. Z nierówności Bernoulliego dla każdego $n \in \boldsymbol{N}$ mamy

$$q^n = \big(1 + (q-1)\big)^n \geqslant 1 + n(q-1) > (q-1) \cdot n.$$

(1) Załóżmy, że $q > 1$. Wtedy

$$q^n > (q-1) \cdot n$$

i wobec tego

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \infty.$$

(2) Załóżmy, że $0 < q < 1$. Wtedy

$$\Big(\frac{1}{q}\Big)^n > \Big(\frac{1}{q} - 1\Big) n,$$

a więc

$$q^n < \frac{q}{1-q} \cdot \frac{1}{n},$$

i wobec tego

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0.$$

2.26. *Jeśli* $a > 0$*, to* $\sqrt[n]{a} \to 1$*.*

Dowód. Niech $a \geqslant 1$. Wtedy na mocy odwrotnej nierówności Bernoulliego

$$1 \leqslant a^{1/n} = (1 + (a-1))^{1/n} \leqslant 1 + \frac{a-1}{n},$$

więc nasza teza wynika z lematu o trzech ciągach. Jeśli zaś $0 < a < 1$, to

$$a^{1/n} = \frac{1}{(1/a)^{1/n}},$$

gdzie $1/a > 1$, i teza wynika z pierwszej części dowodu. □

Czasem ze zbieżności pewnego ciągu, można wnioskować o zbieżności, a nawet o wartości granicy innego ciągu. Rozważmy trzy takie sytuacje.

2.27. *Dla ciągu zbieżnego ciąg kolejnych średnich arytmetycznych jego początkowych wyrazów jest zbieżny do tej samej granicy, tzn.*

$$a_n \xrightarrow{n\to\infty} a \qquad \Rightarrow \qquad A_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \xrightarrow{n\to\infty} a.$$

Dowód. Niech $\varepsilon > 0$ i niech $|a_n - a| < \varepsilon$ dla $n \geqslant N$. Dla $n > N$ mamy

$$A_n - a = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(a_k - a) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(a_k - a) + \frac{1}{n}\sum_{k=N+1}^{n}(a_k - a),$$

więc

$$|A_n - a| \leqslant \frac{C_N}{n} + \varepsilon \leqslant 2\varepsilon$$

dla $n > N$ i $n > C_N/\varepsilon$, gdzie $C_n = \sum_{k=1}^{N}|a_k - a|$. □

2.28. *Niech $\{a_n\}$ będzie ciągiem o wyrazach dodatnich. Wówczas*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to a \ \text{ implikuje } \ \sqrt[n]{a_n} \to a.$$

Dowód. Niech $\varepsilon > 0$ i niech $|\frac{a_n}{a_{n-1}} - a| < \varepsilon$ dla $n \geqslant N$. Dla $n > N$

$$a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \ldots \frac{a_{N+1}}{a_N} \cdot a_N,$$

więc

$$c_N(a-\varepsilon)^n < a_n < C_N(a+e)^n,$$

i stąd

$$\sqrt[n]{c_N}\,(a-\varepsilon) < \sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{C_N}\,(a+e),$$

gdzie

$$c_N = \frac{a_N}{(a-\varepsilon)^N}, \qquad C_N = \frac{a_N}{(a+\varepsilon)^N}.$$

Jeśli n jest tak duże by $\sqrt[n]{c_N} > 1-\varepsilon$ i $\sqrt[n]{C_N} < 1+\varepsilon$, to

$$(1-\varepsilon)(a+\varepsilon) < \sqrt[n]{a_n} < (1+\varepsilon)(a+\varepsilon),$$

skąd już natychmiast wynika nasza teza. □

2.29. Wniosek. *Mamy*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Dowód. Rzeczywiście, jeśli $a_n = n$, to $a_{n+1}/a_n = 1 + 1/n \to 1$ i teza wynika z (2.28). □

2.30. *Niech będzie dany ciąg $a_n \geqslant 0$, taki że $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$. Jeśli $a < 1$, to $a_n \to 0$. Jeśli zaś $a > 1$, to $a_n \to \infty$.*

Dowód. Załóżmy, że $a < 1$. Niech $a < q < 1$. Wtedy $\sqrt[n]{a_n} < q$ dla dostatecznie dużych n, a więc

$$0 \leqslant a_n < q^n$$

i stąd $a_n \to 0$. Jeśli natomiast $a > 0$, niech $1 < q < a$. Wtedy $\sqrt[n]{a_n} > q$ dla dostatecznie dużych n i wobec tego

$$a_n > q^n,$$

skąd $a_n \to \infty$.

□

Niech będą dane dwa ciągi rozbieżne do nieskończoności. Mówimy, że ciąg $\{a_n\}$ jest *szybciej rozbieżny* niż ciąg $\{b_n\}$ i piszemy $a_n \gg b_n$, jeśli

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty.$$

2.31. Przykład. Rozważmy ciąg geometryczny $\{q^n\}_{n=1}^{\infty}$, gdzie $q > 1$, oraz ciąg potęgowy $\{n^N\}_{n=1}^{\infty}$, gdzie i $N \in \boldsymbol{N}$. Wiemy już, że obydwa ciągi są rozbieżne do ∞. Niech

$$a_n = \frac{n^N}{q^n}.$$

Mamy

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^N q^n}{n^N q^{n+1}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^N \cdot \frac{1}{q} \to \frac{1}{q} < 1,$$

więc także

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1,$$

a stąd

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^N}{q^n} = 0.$$

Zatem $n^N \ll q^n$, gdy $q > 1$.

2.32. Przykład. Porównajmy teraz ciąg geometryczny $\{q^n\}_{n=1}^{\infty}$, gdzie $q > 1$, z również rozbieżnym do ∞ ciągiem $\{n!\}_{n=1}^{\infty}$. Niech

$$a_n = \frac{q^n}{n!}.$$

Jak łatwo widać,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{q}{n} \to 0,$$

a więc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{q^n}{n!} = 0,$$

czyli $q^n \ll n!$.

Z aksjomatu ciągłości wynika następujące podstawowe dla teorii zbieżności ciągów twierdzenie.

2.33. Twierdzenie. *Każdy rosnący i ograniczony z góry ciąg $\{a_n\}$ liczb rzeczywistych jest zbieżny.*

Dowód. Niech $a = \sup_{n\in\boldsymbol{N}} a_n$. Pokażemy, że $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Rzeczywiście, dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $N \in \boldsymbol{N}$, takie że $a_N > a - \varepsilon$. Wobec monotoniczności ciągu

$$a - \varepsilon < a_n \leqslant a, \qquad n \geqslant N,$$

co kończy dowód. □

Wystarczy zastosować to twierdzenie do ciągu o wyrazach przeciwnych, by otrzymać

2.34. Wniosek. *Każdy malejący i ograniczony z dołu ciąg liczb rzeczywistych jest zbieżny.*

Jak pokazaliśmy wcześniej, ciąg o wyrazach

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

jest ściśle rosnący i ograniczony, więc, na mocy aksjomatu ciągłości, zbieżny. Wartość jego granicy nazywamy *liczbą e*.

2.35. Twierdzenie. *Zachodzi następująca równość:*

$$e = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

Dowód. Oczywiście ciąg

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

jest ściśle rosnący i, jak wiemy, ograniczony przez 3, a więc zbieżny. Oznaczmy jego granicę przez $a \in \boldsymbol{R}$. Wiemy już także, że

$$e_n = \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = a_n, \qquad n \in \boldsymbol{N},$$

więc na mocy Wniosku 2.11 jest $e \leqslant a$. Pozostaje dowieść nierówności przeciwnej. W tym celu ustalmy liczbę $m \in \boldsymbol{N}$. Wtedy dla dowolnego $n > m \geqslant 2$

$$\begin{aligned} e \geqslant e_n &= \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} \\ &= 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}\Big(1 - \frac{1}{n}\Big)\Big(1 - \frac{2}{n}\Big)\dots\Big(1 - \frac{k-1}{n}\Big) \qquad (2.36) \\ &> 2 + \sum_{k=2}^{m} \frac{1}{k!}\Big(1 - \frac{1}{n}\Big)\Big(1 - \frac{2}{n}\Big)\dots\Big(1 - \frac{k-1}{n}\Big) \\ &\geqslant 2 + \Big(1 - \frac{m}{n}\Big)^m \sum_{k=2}^{m} \frac{1}{k!}. \end{aligned}$$

Przechodząc po prawej stronie do nieskończoności z n, otrzymujemy

$$e \geqslant 2 + \sum_{k=2}^{m} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} = a_m,$$

a stąd, jeszcze raz korzystając z Wniosku 2.11, dostajemy $e \geqslant a$. □

2.37. Przykład. Następująca nierówność określa, jak dokładnie kolejne sumy częściowe a_n przybliżają liczbę e:

$$0 < e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \frac{1}{n \cdot n!}, \qquad n \in \boldsymbol{N}. \qquad (2.38)$$

Aby ją uzasadnić, zauważmy, że dla dowolnego $n \in \boldsymbol{N}$

$$\begin{aligned} e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} &= \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \\ &= \lim_{m\to\infty} \Big(\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\Big) \\ &= \lim_{m\to\infty} \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k!}, \end{aligned}$$

o ile $m > n$. Oszacujmy wyrazy tego ciągu. Mamy

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k!} &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \ldots + \frac{1}{m!} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \cdot \left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \ldots + \frac{1}{(n+2)(n+3)\ldots m}\right) \\ &\leqslant \frac{1}{(n+1)!} \cdot \left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+2)^{m-n-1}}\right) \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1 - \frac{1}{(n+2)^{m-n}}}{1 - \frac{1}{n+2}} \leqslant \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+2}{n+1} \\ &= \frac{1}{n \cdot n!} \cdot \frac{(n+2)n}{(n+1)^2} = \frac{1}{n \cdot n!} \cdot \frac{n^2+2n}{n^2+2n+1} < \frac{1}{n \cdot n!}.\end{aligned}$$

Ponieważ prawa strona ostatniej słabej nierówności nie zależy od m, więc również

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k!} < \frac{1}{n \cdot n!}.$$

2.39 (ważne nierówności). *Dla każdej liczby naturalnej n jest*

$$\Big(n+1\Big)^n < e^n n! < \Big(n+1\Big)^{n+1}.$$

Dowód. Mamy[1]

$$e^n > 2\Big(1+\frac{1}{2}\Big)^2\Big(1+\frac{1}{3}\Big)^3 \ldots \Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n = \frac{(n+1)^n}{n!},$$

skąd natychmiast wynika pierwsza nierówność. Podobnie

$$e^n < 2^2\Big(1+\frac{1}{2}\Big)^3\Big(1+\frac{1}{3}\Big)^4 \ldots \Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n!},$$

a stąd druga nierówność. □

2.40. Wniosek. *Mamy*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = 1/e.$$

2.41. Przykład. Pierwiastek z dowolnej liczby naturalnej jest albo liczbą naturalną albo niewymierną. Załóżmy bowiem, że dla dowolnej liczby naturalnej n

$$\sqrt{n} = \frac{p}{q},$$

gdzie $p \in \boldsymbol{N}$, $q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ oraz p i q są względnie pierwsze. Podnosząc obie strony do kwadratu, otrzymujemy równość równoważną

$$n = \left(\frac{p}{q}\right)^2,$$

a stąd

$$nq^2 = p^2.$$

Gdyby liczba q miała jakiś dzielnik pierwszy, to musiałby on dzielić również prawą stronę, czyli liczbę p, a tak być nie może (bo p i q są względnie pierwsze), zatem q nie ma dzielników pierwszych, czyli $q = 1$, co oznacza, że $\sqrt{n} = p \in \boldsymbol{N}$.

[1] Ten pomysłowy dowód zawdzięczam prof. Tadeuszowi Pytlikowi.

2.42. *Liczba e jest niewymierna.*

Dowód. Załóżmy nie wprost, że $e = \frac{p}{q}$, gdzie $p, q \in \boldsymbol{N}$ są względnie pierwsze. Dla $n = q$ nierówność (2.38) przyjmuje wtedy postać

$$0 < \frac{p}{q} - \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} < \frac{1}{q \cdot q!}.$$

Mnożąc obie strony przez $q!$, otrzymujemy

$$0 < p\,(q-1)! - q! \cdot \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} < \frac{1}{q} \leqslant 1.$$

Aby uzyskać sprzeczność, wystarczy zauważyć, że liczba

$$\alpha = p\,(q-1)! - \sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!} \in (0,1)$$

jest naturalna. □

2.43 (Aproksymacja pierwiastka). *Niech będzie dana liczba $c > 0$. Niech $0 < a < \sqrt{c}$. Definiujemy ciąg*

$$x_0 = a, \qquad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{c}{x_n}\right), \qquad n \in \boldsymbol{N} \cup \{0\}.$$

Ciąg $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem malejącym zbieżnym do $\sqrt{c}$, a ponadto

$$x_n - \sqrt{c} < \frac{x_n^2 - c}{2a}$$

dla każdego $n \in \boldsymbol{N}$.

Dowód. Zauważmy, że

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{c}{x_n}\right) \geqslant \sqrt{x_n \cdot \frac{c}{x_n}} = \sqrt{c},$$

więc $\{x_n\}_{n \in \boldsymbol{N}}$ jest ograniczony z dołu przez $\sqrt{c}$ dla $n \geqslant 1$. Mamy też

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{c}{x_n}\right) \leqslant \max\left\{x_n, \frac{c}{x_n}\right\} = x_n,$$

więc $\{x_n\}_{n \in \boldsymbol{N}}$ jest malejący.

Jako ograniczony od dołu i malejący nasz ciąg ma granicę $x \geqslant \sqrt{c}$. Aby ją obliczyć, przejdźmy do granicy z $n \to \infty$ we wzorze definiującym ciąg, otrzymując

$$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{c}{x}\right),$$

skąd

$$x = \frac{c}{x},$$

a ponieważ $x > 0$, więc

$$x = \sqrt{c}.$$

Oszacowanie błędu wynika stąd, że

$$0 < x_n - \sqrt{c} = \frac{x_n^2 - c}{x_n + \sqrt{c}} < \frac{x_n^2 - c}{2a}.$$

□

Obliczmy dla ilustracji przybliżenia $\sqrt{2}$, jakie można otrzymać tym sposobem. Przyjmując $a = 1$, widzimy, że

$$x_1 = \frac{3}{2} = 1.5, \qquad x_2 = \frac{17}{12} \approx 1.4167, \qquad x_3 = \frac{577}{408} \approx 1.4142.$$

Zbadajmy jeszcze, jak błąd popełniamy przy tych przybliżeniach. Mamy

$$E_2 = x_2 - \sqrt{2} < \frac{1}{288} \approx 0.0035$$

oraz

$$E_3 = x_3 - \sqrt{2} < \frac{1}{332928} \approx 0.000003.$$

2.44. Przykład. Rozważmy ciąg o wyrazach

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}.$$

Ciąg ten oczywiście nie jest monotoniczny. Mimo to wywnioskujemy jego zbieżność z aksjomatu ciągłości. W tym celu przyjrzyjmy się ciągom

$$b_n = a_{2n-1}$$

oraz

$$c_n = a_{2n}.$$

Zauważmy, że

$$b_{n+1} - b_n = a_{2n+1} - a_{2n-1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n} < 0$$

oraz

$$\begin{aligned} b_n = &\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots \\ &+ \left(\frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n-2}\right) + \left(\frac{1}{2n-1}\right) > 0, \end{aligned}$$

gdyż każdy ujęty w nawias składnik sumy jest dodatni. Zatem ciąg $\{b_n\}$, jako malejący i ograniczony od dołu, jest zbieżny (na mocy akjomatu ciągłości). Oznaczmy jego granicę przez $b \in \boldsymbol{R}$. Podobnie dla ciągu wyrazów parzystych ciągu $\{a_n\}$ mamy

$$c_{n+1} - c_n = a_{2n+2} - a_{2n} = -\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} > 0$$

oraz

$$\begin{aligned} c_n = 1 &+ \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) + \ldots \\ &+ \left(-\frac{1}{2n-2} + \frac{1}{2n-1}\right) + \left(-\frac{1}{2n}\right) < 1 \end{aligned}$$

(gdyż każdy ujęty w nawias składnik sumy jest ujemny), więc ciąg $\{c_n\}$ jest zbieżny, jako rosnący i ograniczony z góry. Oznaczmy jego granicę przez $c \in \boldsymbol{R}$. Zauważmy ponadto, że

$$c_n - b_n = -\frac{1}{2n}$$

więc przechodząc do granicy z $n \to \infty$, dostajemy

$$b = c.$$

Pokazaliśmy w ten sposób, że ciągi $\{b_n\}$ i $\{c_n\}$ są zbieżne do tej samej granicy, zatem w każdym przedziale otwartym zawierającym $b = c$ znajdują się prawie wszystkie wyrazy ciągu $\{a_n\}$ o numerach parzystych i prawie wszystkie o numerach nieparzystych, czyli prawie wszystkie wyrazy tego ciągu, co oznacza, że ciąg $\{a_n\}_{n\in\boldsymbol{N}}$ jest zbieżny. Trochę później zobaczymy, że jego granica jest równa $\log 2$.

Kolejnym ważnym pojęciem niniejszego wykładu jest pojęcie punktu skupienia ciągu i ściśle związane z nim pojęcie podciągu. Niech będzie dany ciąg $\{a_n\}_{n\in\boldsymbol{N}}$. Niech ciąg $\{n_k\}_{k\in\boldsymbol{N}}$ o wyrazach naturalnych będzie ściśle rosnący. Wtedy ciąg o wyrazach

$$b_k = a_{n_k}$$

nazywamy *podciągiem* ciągu $\{a_n\}$.

2.45. Twierdzenie. *Każdy podciąg ciągu zbieżnego jest zbieżny do tej samej granicy.*

Udowodnienie tego faktu pozostawiamy Czytelnikowi.

2.46. Twierdzenie (Bolzano-Weierstrass). *Każdy ograniczony ciąg liczb rzeczywistych ma podciąg zbieżny.*

Dowód. Niech $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq [a,b]$. Podzielmy przedział $[a,b]$ na pół i wybierzmy tę połowę, gdzie jest nieskończenie wiele wyrazów ciągu $\{x_n\}$. Oznaczmy ten przedział przez $[a_1,b_1]$. Niech $[a_2,b_2]$ będzie tą połową przedziału $[a_1,b_1]$, która zawiera nieskończenie wiele wyrazów $\{x_n\}$. Analogicznie konstruujemy zstępujący ciąg przedziałów, takich że

$$|a_n - b_n| = 2^{-n}|a-b|,$$

z których każdy zawiera nieskończenie wiele wyrazów ciągu $\{x_n\}$. Zauważmy, że wówczas ciąg $\{a_n\}$ jest rosnący i ograniczony z góry przez b, więc zbieżny do pewnego $\alpha \in \boldsymbol{R}$, a ciąg $\{b_n\}$, jako malejący i ograniczony z dołu przez a, jest zbieżny do pewnego $\beta \in \boldsymbol{R}$. Ponadto

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

więc

$$\alpha = \beta. \tag{2.47}$$

Wybierzmy teraz podciąg $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ ciągu $\{x_n\}$ w następujący sposób: Niech $x_{n_1} \in [a_1,b_1]$. Przypuśćmy, że wybraliśmy już

$$x_{n_1} \in [a_1,b_1]\,,\ x_{n_2} \in [a_2,b_2]\,,\ \ldots,\ x_{n_k} \in [a_k,b_k]$$

tak, że

$$n_1 < n_2 < \ldots < n_k.$$

Jako $x_{n_{k+1}}$ wybieramy taki wyraz z przedziału $[a_{k+1},b_{k+1}]$, aby $n_{k+1} > n_k$. Można to zrobić, bo w przedziale znajduje się nieskończenie wiele wyrazów ciągu $\{x_n\}$.

Skoro

$$a_k \leqslant x_{n_k} \leqslant b_k, \quad k \in \boldsymbol{N},$$

więc na mocy (2.47) i twierdzenia o trzech ciągach również

$$x_{n_k} \xrightarrow{n\to\infty} \alpha = \beta,$$

co kończy dowód. □

Mówimy, że liczba ξ jest *punktem skupienia ciągu* $\{x_n\}$ jeśli w każdym przedziale otwartym zawierającym ξ znajduje się nieskończenie wiele wyrazów ciągu $\{x_n\}$.

2.48. *Liczba ξ jest punktem skupienia ciągu $\{x_n\}$ wtedy tylko wtedy, gdy ciąg $\{x_n\}$ ma podciąg zbieżny do ξ.*

2.49. Przykład. Jeśli przez A oznaczymy zbiór punktów skupienia ciągu, to w przypadku ciągu stałego $x_n = c$ jest $A = \{c\}$; w przypadku ciągu $x_n = (-1)^n$ jest $A = \{-1, 1\}$; w przypadku ciągu zbieżnego do granicy a jest $A = \{a\}$.

2.50. Przykład. Niech $\{x_n\}$ będzie ciągiem wszystkich liczb wymiernych odcinka $[0, 1]$, a ξ dowolną liczbą z tego odcinka. Wybierzmy teraz podciąg $\{x_{n_k}\}_{k\in \boldsymbol{N}}$ ciągu $\{x_n\}$ tak, aby

$$\forall k \in \boldsymbol{N} \qquad x_{n_k} \in \Big(\xi - \frac{1}{k}\, , \, \xi + \frac{1}{k} \Big).$$

Możemy oczywiście wybrać taki podciąg, gdyż między dwiema różnymi liczbami rzeczywistymi znajduje się nieskończenie wiele liczb wymiernych. Tak wybrany podciąg jest zbieżny do ξ, co oznacza, że zbiorem punktów skupienia ciągu $\{x_n\}$ jest cały odcinek $[0, 1]$.

2.51. Twierdzenie. *Jeżeli wszystkie podciągi zbieżne ciągu ograniczonego są zbieżne do tej samej granicy, to sam ciąg jest również zbieżny do tej granicy. Równoważnie, jeżeli ciąg ograniczony jest rozbieżny, to ma przynajmniej dwa podciągi zbieżne do różnych granic.*

Dowód. Niech $\{x_n\} \subseteq [a, b]$ będzie ciągiem rozbieżnym. Z twierdzenia Bolzano-Weierstrassa istnieje podciąg

$$x_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} \alpha.$$

Z rozbieżności ciągu $\{x_n\}$ istnieje $\varepsilon > 0$ taki, że poza przedziałem $(\, \alpha - \varepsilon\, , \, \alpha + \varepsilon\,)$ znajduje się nieskończenie wiele wyrazów $\{x_n\}$, które oczywiście nadal należą do przedziału $[a, b]$, więc spośród nich również możemy wybrać podciąg zbieżny, tzn.

$$x_{m_k} \xrightarrow{k\to\infty} \beta,$$

gdzie

$$|x_{m_k} - \alpha| \geqslant \varepsilon, \qquad k \in \boldsymbol{N},$$

a stąd $|\beta - \alpha| \geqslant \varepsilon$, więc $\alpha \neq \beta$. □

2.52. Wniosek. *Ciąg ograniczony jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór jego punktów skupienia jest jednoelementowy.*

Okazuje się, że można mówić o zbieżności w oderwaniu od pojęcia granicy. Służy temu pojęcie ciągu Cauchy'ego, które jak zobaczymy za chwilę, jest w istocie równoważne pojęciu ciągu zbieżnego. Mówimy, że ciąg liczbowy $\{a_n\}_{n\in\boldsymbol{N}}$ jest *ciągiem Cauchy'ego* (lub *ciągiem fundamentalnym*), jeśli

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \boldsymbol{N} \quad \forall n \geqslant N \quad |a_n - a_N| < \varepsilon.$$

Zauważmy, że warunek Cauchy'ego można równoważnie wysłowić tak:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \boldsymbol{N} \quad \forall n, m \geqslant N \quad |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Jest jasne, że ten drugi warunek jest silniejszy od pierwszego. Czytelnik zechce sam sprawdzić, że są one w istocie równoważne.

2.53. Twierdzenie. *Ciąg liczb rzeczywistych jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy jest ciągiem Cauchy'ego.*

Dowód. ($\Rightarrow$) Weźmy ciąg zbieżny $\{a_n\}$. Niech $\varepsilon > 0$. Ze zbieżności ciągu wynika, że istnieje takie $N \in \boldsymbol{N}$, że dla dowolnych $n \geqslant N$

$$|a_n - a| < \varepsilon,$$

więc
$$|a_n - a_N| < 2\varepsilon.$$
($\Leftarrow$) Weźmy ciąg Cauchy'ego $\{a_n\}$. Wtedy istnieje takie $N \in \boldsymbol{N}$, że dla każdego $n \geqslant N$
$$|a_n - a_N| < 1$$
czyli
$$a_N - 1 < a_n < a_N + 1.$$
Ponieważ poza tym przedziałem jest tylko skończona liczba wyrazów, więc cały ciąg $\{a_n\}$ jest ograniczony. Zgodnie z twierdzeniem Bolzano-Weierstrassa istnieje podciąg $\{a_{n_k}\}_{k\in\boldsymbol{N}}$ ciągu $\{a_n\}$ zbieżny do pewnego $\alpha \in \boldsymbol{R}$. Pokażemy, że cały ciąg $\{a_n\}$ jest zbieżny do α. W tym celu ustalmy dowolnie liczbę $\varepsilon > 0$. Ponieważ $\{a_n\}$ jest fundamentalny, więc istnieje $N \in \boldsymbol{N}$, takie że
$$|a_n - a_m| < \varepsilon, \qquad m, n \geqslant N.$$
Natomiast ze zbieżności podciągu $\{a_{n_k}\}$ do liczby α wynika, że
$$|a_{n_k} - \alpha| < \varepsilon, \qquad k \geqslant K,$$
dla pewnego $K \in \boldsymbol{N}$. Ponieważ $\{n_k\}$ jest rosnący i rozbieżny do ∞, więc zwiększając ewentualnie K możemy przyjąć, że także
$$n_k \geqslant N, \qquad k \geqslant K.$$
Wtedy dla każdego $k \geqslant K$ i każdego $n \geqslant N$ mamy
$$|a_{n_k} - \alpha| < \varepsilon, \qquad |a_{n_k} - a_n| < \varepsilon,$$
a stąd
$$|a_n - \alpha| \leqslant |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - \alpha| < 2\varepsilon,$$
co oznacza, że $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$. □

Dla ciągu $\{a_n\}$ zdefiniujmy nowy ciąg
$$a'_n = a_{n+1} - a_n,$$
który będziemy nazywać *ciągiem przyrostów* albo *pochodną* ciągu $\{a_n\}$.

2.54. Twierdzenie (Stolz). *Niech będą dane dwa ciągi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$, przy czym ciąg $\{b_n\}$ jest ściśle rosnący i rozbieżny do ∞. Wtedy zachodzi następująca implikacja:*
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a'_n}{b'_n} = g \in \boldsymbol{R} \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = g.$$
Dowód. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $a_1 = b_1 = 0$ oraz $b_n > 0$ dla $n \geqslant 2$. Załóżmy też na razie, że $g = 0$. Niech $\varepsilon > 0$. Z założenia istnieje takie $N_1 \in \boldsymbol{N}$, że
$$\forall n \geqslant N_1 \qquad |a'_n| \leqslant b'_n \varepsilon. \tag{2.55}$$
Skoro ciąg $\{b_n\}$ jest ściśle rosnący, to ciąg $\{b'_n\}$ ma wszystkie wyrazy dodatnie i
$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right| &= \left|\frac{1}{b_{n+1}}\left(\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1} - a_k)\right)\right| \\ &\leqslant \frac{1}{b_{n+1}}\sum_{k=1}^{n}|a'_k| = \frac{1}{b_{n+1}}\sum_{k=1}^{N_1}|a'_k| + \frac{1}{b_{n+1}}\sum_{k=N_1+1}^{n}|a'_k| \\ &\leqslant \frac{C_{N_1}}{b_{n+1}} + \frac{\varepsilon}{b_{n+1}}\sum_{k=N_1+1}^{n} b'_k \leqslant 2\varepsilon\end{aligned}$$

dla wszystkich $n \geqslant N_2$, gdzie $\boldsymbol{N} \ni N_2 > N_1$ jest dobrane tak, aby

$$b_n \geqslant \frac{C_{N_1}}{\varepsilon}, \quad n \geqslant N_2,$$

a

$$C_{N_1} = \sum_{k=1}^{N_1} |a'_k|$$

jest stałą. Istnienie takiego N_2 wynika oczywiście z rozbieżności do ∞ ciągu $\{b_n\}$. Tym samym dowiedliśmy twierdzenia w przypadku, gdy $g = 0$.

Dla dowolnego $g \in \boldsymbol{R}$ niech

$$\alpha_n = a_n - b_n g.$$

Wtedy, jak łatwo zauważyć $\alpha'_n = a'_n - g b'_n$, więc ciągi $\{\alpha_n\}$ i $\{b_n\}$ spełniają założenia twierdzenia z $g = 0$ i na mocy pierwszej części dowodu $\frac{\alpha_n}{b_n} \to 0$, skąd natychmiast

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha_n + g b_n}{b_n} \xrightarrow{n\to\infty} g.$$

I tak dowód został zakończony. $\square$

2.56. Przykład. Stosując twierdzenie Stolza, pokażemy że dla dowolnego $\alpha > 0$

$$x_n = \frac{1 + 2^\alpha + 3^\alpha + \ldots + n^\alpha}{n^{\alpha+1}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{\alpha+1}.$$

W tym celu przyjmijmy oznaczenia:

$$a_n = 1^\alpha + 2^\alpha + 3^\alpha + \ldots + n^\alpha$$

oraz

$$b_n = n^{\alpha+1}.$$

Ciąg $\{b_n\}$ jest oczywiście ściśle rosnący i rozbieżny do ∞. Zauważmy, że

$$\frac{a'_n}{b'_n} = \frac{(n+1)^\alpha}{(n+1)^{\alpha+1} - n^{\alpha+1}},$$

gdzie

$$(n+1)^{\alpha+1} - n^{\alpha+1} = (n+1)^{\alpha+1}\Big(1 - \Big(1 - \frac{1}{n+1}\Big)^{\alpha+1}\Big) \leqslant (n+1)^\alpha(\alpha+1)$$

oraz

$$(n+1)^{\alpha+1} - n^{\alpha+1} = n^{\alpha+1}\Big(\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^{\alpha+1} - 1\Big) \geqslant n^\alpha(\alpha+1).$$

Szacując skorzystaliśmy dwukrotnie z nierówności Bernoulliego. Z otrzymanych nierówności wynika, że

$$\frac{1}{\alpha+1} \leqslant \frac{a'_n}{b'_n} \leqslant \frac{(1+1/n)^\alpha}{\alpha+1},$$

a stąd na mocy lematu o trzech ciągach

$$\frac{a'_n}{b'_n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{\alpha+1},$$

co po zastosowaniu twierdzenia Stolza daje

$$x_n = \frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{\alpha+1}.$$

2.57. Przykład. Rozważmy ciąg o wyrazach
$$x_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right)\frac{1}{n^\alpha},$$
gdzie $\alpha > 0$. Pokażemy, że
$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$
Istotnie, jeśli przyjmiemy oznaczenia
$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n},$$
oraz
$$b_n = n^\alpha,$$
to oczywiście ciąg $\{b_n\}$ jest ściśle rosnący i rozbieżny do ∞ oraz
$$\begin{aligned} 0 < \frac{a'_n}{b'_n} &= \frac{\frac{1}{n+1}}{(n+1)^\alpha - n^\alpha} \\ &= \frac{1}{(n+1)^{\alpha+1}} \cdot \frac{1}{1-(1-\frac{1}{n+1})^\alpha} \\ &\leqslant \frac{1}{\alpha(n+1)^\alpha} \xrightarrow{n\to\infty} 0, \end{aligned}$$
więc na mocy twierdzenia Stolza
$$x_n \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$
Szacując skorzystaliśmy z odwrotnej nierówności Bernoulliego
$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha \leqslant 1 + \frac{\alpha}{n}$$
obowiązującej dla $0 < \alpha \leqslant 1$, bo też i do takich α można się tu ograniczyć.

Zadania

1. Ciąg (a_n) jest ściśle rosnący. Pokaż, że ciąg $A_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$ jest też ściśle rosnący.

2. Niech ξ będzie liczbą niewymierną. Pokaż, że ciąg $a_n = \mathbf{m}(n\xi)$ jest różnowartościowy.

3. Znajdź blok B'_{10} w przekątniowej numeracji liczb wymiernych dodatnich, pamiętając o odrzuceniu wszystkich wyrazów występujących już wcześniej.

4. Znajdź wyraz w'_{17} w przekątniowym ciągu liczb wymiernych dodatnich.

5. Udowodnij, że $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

6. Udowodnij, że $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

7. Uzasadnij, że dla każdego $n \in \boldsymbol{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 2.$$

8. Popraw wynik poprzedniego zadania, tak by uzyskać nierówność

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 1 + \frac{3}{4}.$$

9. Wykaż, że ciąg $e_n = (1 - \frac{1}{n})^{n-1}$ jest malejący, natomiast ciąg $f_n = (1 - \frac{1}{n})^n$ nie jest.

10. Korzystając z nierówności Bernoulli'ego, sprawdź, że ciąg $u_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$ jest malejący, a ciąg $v_n = (1 - \frac{1}{n})^n$ – rosnący.

11. Niech $a \in \boldsymbol{R}$. Sprawdź, że warunki $\forall \varepsilon > 0 \quad a < \varepsilon$ oraz $\forall n \in \boldsymbol{N} \quad a < 1/n$ są równoważne. Korzystając z tego zmodyfikuj odpowiednio definicję granicy ciągu.

12. Dane są liczby $x, y > 0$ i liczba wymierna $0 < u < x + y$. Wykaż, że istnieją liczby wymierne $0 < v < x$ i $0 < w < y$, takie że $u = v + w$.

13. Udowodnij nierówności

$$1 + \frac{b-1}{(n-1)b+1} < b^{1/n} < 1 + \frac{b-1}{n}, \qquad 1 \neq b > 0, \quad n > 1.$$

14. Udowodnij nierówność $\sqrt[n]{n} \leqslant 1 + \sqrt{\frac{2}{n}}$. W tym celu podnieś obie strony do n-tej potęgi i skorzystaj ze wzoru Newtona.

15. Wprost z definicji wykaż, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{6n+2}{7n-3} = \frac{6}{7}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2+1} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1+2+3+\cdots+n}{(n+1)^2} = \frac{1}{2}.$$

16. Ponumeruj metodą przekątniową wszystkie liczby wymierne z odcinka $[0, 1]$. Otrzymany ciąg jest ograniczony, ale rozbieżny. Uzasadnij.

17. Pokaż, że dla każdego $n \in \boldsymbol{N}$ jest $(1 + \frac{1}{n})^{2n} < \sum_{k=0}^{2n} \frac{2^k}{k!}$.

18. Udowodnij nierówności

$$n! \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^n, \qquad n! < e\left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

19. Niech $< x < 1$ będzie liczbą rzeczywistą o zapisie dziesiętnym $0.c_1c_2c_3\ldots$, w którym nie występuje okres (9). Sprawdź, że $c_n = \left[10 \cdot \mathbf{m}(10^{n-1})\right]$. Kiedy ciąg $\{c_n\}$ jest zbieżny?

20. Niech $a_n > 0$ dla $n \in \boldsymbol{N}$. Wykaż, że $a_n \to 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{1}{a_n} \to \infty$.

21. Niech φ będzie dowolnym wielomianem. Wykaż, że $\frac{\varphi(n)}{2^n} \to 0$, gdy $n \to \infty$.

22. Ciąg $\{a_n\}$ jest ograniczony, a $\{b_n\}$ zbieżny do 0. Pokaż, że $a_n b_n \to 0$.

23. Wiedząc, że $a_n \to a$, znajdź granice ciągów $b_n = a_{n+1} - a_n$, $c_n = a_n + 2a_{n+1}$, $d_n = |a_n|$, $e_n = a_n a_{n+1}$, $f_n = \max\{a_n, a_{n+1}\}$.

24. Wiemy, że $a_n \to a$. Czy ciąg $b_n = [a_n]$ ma granicę?

25. Wykaż, że

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \to 1, \qquad \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \to 0.$$

Pierwszy ciąg jest rosnący, a drugi – malejący. Uzasadnij.

26. Dany jest ciąg $a_n \to a$. Budujemy nowy ciąg $b_n = \sum_{k=1}^{n}(a_{k+1} - a_k)$. Wykaż, że $b_n \to b = a - a_1$. Czy nie przeczy to tezie, że pierwszy wyraz ciągu nie może mieć wpływu na wartość granicy?

27. Wykaż, że $\sqrt[n^2]{n} \to 1$.

28. Wykaż, że $0 < \left(\frac{3001}{3000}\right)^{3001} - e < 10^{-3}$.

29. Oblicz granice ciągów

$$a_n = \sqrt[n]{2^n + 5^n}, \qquad b_n = \sqrt[n^2]{2^n + 5^n}, \qquad c_n = (2^n + 5^n)^{\frac{1}{\sqrt{n}}}.$$

30. Zbadaj zbieżność i granicę ciągu $n^\alpha q^n$, gdzie $q > 0$, $\alpha \in \boldsymbol{R}$.

31. Uzasadnij nierówność

$$n^{n+1} > (n+1)^n, \qquad n \geqslant 3.$$

32. Pokaż, że ciąg $a_n = n^{1/n}$ jest ściśle monotoniczny dla $n \geqslant 3$.

33. Udowodnij, że $\sqrt[n^2]{n!} \to 1$.

34. Wiedząc, że $0 < a < b$, oblicz granicę ciągu

$$x_n = \frac{a^n + 3b^n}{5a^n + 7b^n}.$$

35. Pokaż, że ciągi $n^{1/n}$ i $n!^{1/n}$ są monotoniczne.

36. Niech $a > 1$ i niech $a_n = [a^n]$. Oblicz $\lim_{n\to\infty} a_n$ i $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$.

37. Znajdź liczbę wymierną w przedziale $(2\frac{7}{10}, e)$.

38. Który z podanych ciągów szybciej dąży do nieskończoności: a) $a_n = n!$, $b_n = n^n$; b) $a_n = 3^n$, $b_n = 2^n n^4$; c) $a_n = \frac{n!}{4^n}$, $b_n = 2^n$?

39. Niech $x_1 = -\frac{1}{2}$ i $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + x_n^{-1})$. Znajdź granicę tego ciągu.

40. Niech $p_1 = \frac{1}{3}$ i $p_{n+1} = \frac{p_n + 9(1-p_n)}{10}$. Znajdź granicę tego ciągu.

41. Znajdź kresy zbiorów $A = \{\frac{1}{n} : n \in \boldsymbol{N}\}$, $B = \{\frac{m}{n} + \frac{4n}{m} : m, n \in \boldsymbol{N}\}$, $C = \{\frac{m}{|m|+n} : m \in \boldsymbol{Z}, n \in \boldsymbol{N}\}$. W każdym przypadku wskaż ciąg elementów zbioru zbieżny do danego kresu.

42. Oblicz $\sup_{m\in\boldsymbol{N}} \inf_{n\in\boldsymbol{N}} \frac{m}{m+n}$ oraz $\inf_{n\in\boldsymbol{N}} \sup_{m\in N} \frac{m}{m+n}$.

43. Wykaż, że $\min_{0\leqslant k\leqslant n} k!(n-k)! = [\frac{n}{2}]!(n - [\frac{n}{2}])!$ i $\max_{0\leqslant k\leqslant n} k!(n-k)! = n!$.

44. Udowodnij, że dla każdego $q > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{nq^n}{[\frac{n}{2}]!} = 0.$$

45. Oblicz granice $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}}$ i $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{\sqrt{n!}})^{\sqrt{n!}}$.

46. Wiadomo, że $a_n \to a$ i $b_n \to b$. Wykaż, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0}{n} = ab.$$

47. Znajdź przybliżenie $\sqrt{3}$, przyjmując $x_0 = 2$ i obliczając x_3. Oszacuj też błąd przybliżenia.

48. Znajdź przybliżenie $\sqrt{5}$, przyjmując $x_0 = 3$ i obliczając x_2. Oszacuj też błąd przybliżenia.

49. Niech $a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{1+\sqrt{k}}$. Naśladując rozumowanie z wykładu, pokaż, że ten ciąg jest zbieżny.

50. Niech $c > 0$. Pokaż, że ciąg $a_1 = \sqrt{c}$, $a_{n+1} = \sqrt{c + a_n}$ jest zbieżny i znajdź jego granicę.

51. Niech będzie dany zstępujący ciąg przedziałów domkniętych $I_{n+1} \subset I_n \subset \boldsymbol{R}$. Udowodnij, że przekrój $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ jest niepusty. Pokaż na przykładzie, że tak być nie musi dla przedziałów półotwartych, a tym bardziej otwartych.

52. Wykaż, że jeśli $p_n, q_n \in \boldsymbol{N}$ i $\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n} = \xi$ jest liczbą niewymierną, to $\lim_{n\to\infty} q_n = \infty$.

53. Wykaż, że ciąg monotoniczny, który ma podciąg ograniczony, sam jest ograniczony.

54. Ile punktów skupienia może mieć ciąg monotoniczny?

55. Zbuduj ciąg, którego zbiorem punktów skupienia jest $E = \{\frac{1}{n} : n \in \boldsymbol{N}\}$. [W tym celu elementy zbioru $\{\frac{1}{n} + \frac{1}{m} : n, m \in \boldsymbol{N}\}$ ustaw w ciąg metodą tablicową.]

56. Ciąg $a_n > 0$ spełnia warunek rekurencyjny $a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}$. Wykaż, że a_n dąży do złotej liczby $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

57. Znajdź wszystkie punkty skupienia ciągu $u_n = \mathbf{m}(\frac{np}{q})$, gdzie $p, q \in \boldsymbol{N}$ są względnie pierwsze.

58. Pokaż, że z każdego ciągu Cauchy'ego $\{x_n\}$ można wybrać podciąg $\{x_{n_k}\}$, taki że $|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}| < 2^{-k}$ dla $k \in \boldsymbol{N}$.

59. Znajdź granicę ciągu $u_{n+1} = \frac{1}{2-u_n}$, gdzie $1/2 < u_1 < 1$.

60. Wiadomo, że $a_{n+1} - a_n \to a$. Pokaż, że $\frac{a_n}{n} \to a$.

61. Niech $a_n \to a$ i $b_n \to b$. Wykaż, że wtedy $\max(a_n, b_n) \to \max(a, b)$.

62. Udowodnij, że jeśli $0 < a_n \to a$, to $b_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \to a$. Jeśli natomiast $a_n \to \infty$, to $b_n \to \infty$.

63. Udowodnij, że granica ciągu $z_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k)!}$ jest liczbą niewymierną.

64. Niech $a_n \to a$ i niech $\boldsymbol{N} \ni n_k \to \infty$. Udowodnij, że $b_k = a_{n_k} \to a$. Czy $\{b_k\}$ jest podciągiem $\{a_n\}$?

65. Znajdź zbiór A punktów skupienia ciągów

$$a_n = (-1)^n, \quad b_n = \frac{2(-1)^n n + 3}{n+1}, \quad c_n = \frac{1}{n} + \sin\frac{\pi n}{3}, \quad d_n = \Big(1 + \frac{(-1)^n}{n}\Big)^n.$$

66. Dany jest ułamek nieskracalny $x = p/q \in (0, 1)$. Znajdź wszystkie punkty skupienia ciągu $a_n = \mathbf{m}(nx)$.

67. Dany jest ciąg ograniczony $\{a_n\}$. Budujemy nowy ciąg $b_n = \sup_{k \geqslant n} a_k$. Sprawdź, że ciąg $\{b_n\}$ jest malejący i ograniczony od dołu.

68. Pokaż, że jeśli $|u_{n+1} - u_n| < 2^{-n}$ dla $n \in \boldsymbol{N}$, to ciąg $\{u_n\}$ jest fundamentalny.

69. Nie korzystając z aksjomatu ciągłości, wykaż, że ograniczony ciąg monotoniczny jest fundamentalny.

70. Wiedząc, że ciąg $\{a_n\}$ jest postępem arytmetycznym o wyrazach dodatnich i różnicy $r > 0$, oblicz granice

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n^2},$$

71. Wiedząc, że ciąg $\{a_n\}$ jest postępem arytmetycznym o wyrazach dodatnich i różnicy $r > 0$, pokaż, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(a_1 a_2 \dots a_n)^{\frac{1}{n}}}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} = \frac{2}{e}.$$

72. Wykaż, że ciąg

$$a_n = \frac{(1+1)^{n^2}}{e^n}$$

jest malejący, a więc zbieżny. (Jego granica wynosi $1/\sqrt{e}$, ale to udowodnimy później.)