3. Funkcje elementarne

Funkcjami elementarnymi będziemy nazywać funkcję tożsamościową $x \mapsto x$, funkcję wykładniczą, funkcje trygonometryczne oraz wszystkie funkcje, jakie można otrzymać z wyżej wymienionych drogą następujących operacji: ograniczania dziedziny, dodawania, mnożenia, dzielenia i odwracania funkcji, gdy jest to możliwe. Tak więc wśród funkcji elementarnych znajdą się także funkcja logarytmiczna, wielomiany, funkcje wymierne, kołowe, hiperboliczne i wiele innych.

W tym rozdziale podamy precyzyjne definicje tych funkcji i wypunktujemy ich najprostsze własności. Zacznijmy od podstawowych własności potęgi:

(a) $a^x > 0$,
(b) $a^{x+y} = a^x a^y$,
(c) Jeśli $a > 1$ i $x > 0$, to $a^x > 1$,
(d) $(a^x)^y = a^{xy}$

dla $a > 0$ oraz $x, y \in \boldsymbol{R}$.

Dla ustalonego $a > 0$ funkcję

$$\mathbf{R} \ni x \longmapsto a^x \in (0, \infty)$$

nazywamy *funkcją wykładniczą o podstawie* a. Jeśli $a = e$, to funkcję

$$x \longmapsto e^x$$

nazywamy po prostu *funkcją wykładniczą*. Zauważmy, że z własności c) wynika, że funkcja wykładnicza o podstawie $a > 1$ jest ściśle rosnąca.

Jeśli z kolei ustalimy $\alpha \in \boldsymbol{R}$, to funkcja

$$(0, \infty) \ni x \longmapsto x^\alpha \in (0, \infty)$$

nazywa się *funkcją potęgową* o wykładniku α. W przypadku, gdy $\alpha = n \in \boldsymbol{N}$, dziedziną funkcji potęgowej jest cała prosta $\boldsymbol{R}$.

3.1. Lemat. *Niech* $a > 0$ *i niech* $A = \max\{a, 1/a\}$. *Wtedy*

$$|a^x - 1| \leqslant A^{|x|} - 1, \qquad x \in \boldsymbol{R}. \tag{3.2}$$

Co więcej, jeśli $|x| \leqslant 1$, *to*

$$|a^x - 1| \leqslant (A - 1)|x|. \tag{3.3}$$

Dowód. Rzeczywiście, jeśli $a^x \geqslant 1$,

$$|a^x - 1| = a^x - 1 \leqslant A^{|x|} - 1,$$

a jeśli $a^x < 1$, to

$$|a^x - 1| = 1 - a^x = a^x(a^{-x} - 1) \leqslant a^{-x} - 1 \leqslant A^{|x|} - 1,$$

co dowodzi pierwszej nierówności. Druga wynika z pierwszej przez zastosowanie odwrotnej nierówności Bernoulliego:

$$|a^x - 1| \leqslant A^{|x|} - 1 = \Big(1 + (A - 1)\Big)^{|x|} - 1 \leqslant (A - 1)|x|,$$

bo $|x| \leqslant 1$. $\square$

3.4. Twierdzenie. *Niech* $a > 0$. *Wtedy* $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x \in \mathbf{R}$ *pociąga* $a^{x_n} \xrightarrow{n\to\infty} a^x$.

Dowód. Dla dostatecznie dużych n, mamy $|x - x_n| \leqslant 1$. Wtedy

$$|a^{x_n} - a^x| = a^x|a^{x_n - x} - 1| \leqslant a^x(A-1)|x_n - x|,$$

skąd natychmiast wynika nasza teza. □

3.5. Twierdzenie. *Niech* $0 < a_n \to a > 0$. *Wtedy dla każdego* $x \in \boldsymbol{R}$

$$a_n^x \xrightarrow{n\to\infty} a^x.$$

Dowód. Przyjmijmy najpierw, że $a = 1$ i $[x] = m$. Wtedy

$$b_n \leqslant a_n^x \leqslant B_n,$$

gdzie

$$b_n = \min\{a_n^m, a_n^{m+1}\}, \qquad B_n = \max\{a_n^m, a_n^{m+1}\}.$$

jak widać, $b_n \to 1$ i $B_n \to 1$, więc na mocy lematu o trzech ciągach $a_n \to 1$[1].

Niech teraz $A_n = \max\{a_n/a, a/a_n\}$. Skoro $a_n \to a$, mamy $A_n \to 1$. Ponadto

$$|a_n^x - a^x| = a^x|(a_n/a)^x - 1| \leqslant a^x(A_n^{|x|} - 1)|x|,$$

gdzie $A_n^{|x|} \to 1$, co daje naszą tezę. □

3.6. *Jeśli* $1 < a_n \to \infty$, *to*

$$A_n = \big(1 + 1/a_n\big)^{a_n} \longrightarrow e, \qquad B_n = \big(1 - 1/a_n\big)^{-a_n} \longrightarrow e,$$

Dowód. Przyjmijmy najpierw, że $a_n \in \boldsymbol{N}$. Wtedy wszystkie wyrazy ciągu $\{A_n\}$ są również wyrazami ciągu o wyrazach

$$e_n = \big(1 + 1/n\big)^n$$

z co najwyżej skończoną ilością powtórzeń, więc

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} e_n = e.$$

Dla dowolnego ciągu $\{a_n\}$ skorzystamy z twierdzenia o trzech ciągach. Mamy bowiem

$$\left(1 + \frac{1}{[a_n]+1}\right)^{[a_n]} \leqslant A_n \leqslant \left(1 + \frac{1}{[a_n]}\right)^{[a_n]+1}$$

i na mocy pierwszej części dowodu skrajne ciągi są zbieżne do e.

Druga część tezy wynika z równości

$$B_n = \left(\frac{a_n}{a_n - 1}\right)^{a_n} = \left(1 + \frac{1}{a_n - 1}\right)^{a_n}$$

i wcześniejszych rozważań. □

3.7. Twierdzenie. *Dla każdego* $x \in \boldsymbol{R}$

(3.8)
$$\lim_{|x|<n\to\infty} \big(1 + x/n\big)^n = e^x.$$

Dowód. Jeśli $x = 0$, teza jest trywialna. Jeśli $x \neq 0$, to $a_n = \frac{n}{x} \to \pm\infty$ zależnie od znaku x. W obu przypadkach

$$\big(1 + x/n\big)^n = \left(\big(1 + 1/a_n\big)^{a_n}\right)^x \longrightarrow e^x$$

na mocy (3.6) i Twierdzenia 3.5. □

[1]Ten sposób rozumowania podpowiedział mi p. Bartosz Kuśmierz.

Przyjrzyjmy się jeszcze ciągowi (3.8). Jeśli $x \neq 0$ i $n > |x|$, to z nierówności Bernoulliego wynika, że

$$\left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{n}}\right)^n > \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n,$$

a więc ciąg ten dla $n > |x|$ jest ściśle rosnący.

3.9. Wniosek. *Dla każdego* $x \neq 0$

$$e^x > 1 + x.$$

Dla każdego $0 \neq x < 1$

$$e^x < 1 + \frac{x}{1-x}.$$

Dowód. Jeśli $x \neq 0$, to dzięki nierówności Bernoulliego (dla wykładników naturalnych) i temu, że ciąg (3.8) jest rosnący, otrzymujemy

$$e^x > \left(1 + \frac{x}{N}\right)^N > 1 + x,$$

jeśli $N = [x] + 1$.

Stąd, jeśli dodatkowo $x < 1$,

$$e^x = \frac{1}{e^{-x}} < \frac{1}{1-x} = 1 + \frac{x}{1-x},$$

co kończy dowód. □

3.10. Lemat. *Dla dowolnych naturalnych* $2 \leqslant k \leqslant n$

$$0 < 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \leqslant \frac{k(k-1)}{2n}.$$

Dowód. Niech

$$A_k = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right),$$

gdzie $2 \leqslant k \leqslant n$. Jak widać, $A_2 = \frac{1}{n}$ oraz

$$A_k \leqslant A_{k-1} + \frac{k-1}{n}, \qquad 2 < k \leqslant n,$$

skąd przez indukcję

$$A_k \leqslant \sum_{j=1}^{k-1} \frac{j}{n} = \frac{k(k-1)}{2n}.$$

□

3.11. Twierdzenie. *Dla każdego* $x \in \boldsymbol{R}$

$$e^x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

Dowód. Przypuśćmy najpierw, że $x \geqslant 0$. Zauważamy, że dla $n > m \geqslant 2$

$$\left(1 - \frac{m}{n}\right)^m \sum_{k=0}^{m} \frac{x^k}{k!} < \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n < \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!},$$

skąd analogicznie jak w rozdziale 2 otrzymujemy żądaną równość.

Niech teraz x będzie dowolne. Oszacujmy różnicę

$$\left|\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} - \Big(1+\frac{x}{n}\Big)^n\right| \leqslant \sum_{k=2}^{n} \Big(1 - (1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\dots(1-\frac{k-1}{n})\Big)\frac{|x|^k}{k!}.$$

Na mocy Lematu i pierwszej części dowodu dla $|x| \geqslant 0$

$$\left|\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} - \Big(1+\frac{x}{n}\Big)^n\right| \leqslant \frac{1}{2n}\sum_{k=2}^{n} \frac{|x|^k}{(k-2)!} \leqslant \frac{|x|^2 e^{|x|}}{2n},$$

skąd już łatwo wynika teza. □

3.12. Wniosek. *Dla każdego $|x| \leqslant 1$ i każdego $n \in N$*

$$e^x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} + r_n(x),$$

gdzie

$$|r_1(x)| \leqslant (e-1)|x|, \qquad |r_n(x)| \leqslant \frac{|x|^n}{(n-1)!(n-1)}, \qquad n \geqslant 2.$$

Dowód. Jak łatwo zauważyć

$$r_n(x) = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=n}^{m} \frac{x^k}{k!}.$$

Jak wiemy, dla $n \geqslant 2$

$$\left|\sum_{k=n}^{m} \frac{x^k}{k!}\right| \leqslant \sum_{k=n}^{m} \frac{|x|^k}{k!} \leqslant |x|^n \sum_{k=n}^{m} \frac{1}{k!} < \frac{|x|^n}{(n-1)!(n-1)},$$

bo $|x| \leqslant 1$. Oszacowanie dla $n = 1$ widać bezpośrednio. Zatem po przejściu do nieskończoności z m, widać, że reszty r_n spełniają żądane nierówności. □

Warto dobrze zapamiętać najprostsze przypadki tej nierówności:

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + r_1(x) = 1 + x + r_2(x) \\ &= 1 + x + x^2/2 + r_3(x), \qquad |x| \leqslant 1, \end{aligned}$$

gdzie

$$|r_1(x)| \leqslant (e-1)|x|, \qquad |r_2(x)| \leqslant |x|^2, \qquad |r_3(x)| \leqslant |x|^3/4.$$

Dla oznaczenia funkcji wykładniczej będziemy też używali symbolu

$$\exp x = e^x.$$

3.13. *Obrazem $\boldsymbol{R}$ przez funkcję wykładniczą jest cała półprosta dodatnia. Innymi słowy,*

$$\exp(\boldsymbol{R}) = (0, \infty).$$

Dowód. Niech dla $y > 0$

$$E = \{x \in \boldsymbol{R} : e^x < y\}.$$

Ponieważ $y < e^y$, więc także $e^{-1/y} < y$. Stąd $x = -1/y \in E$ oraz y jest górnym ograniczeniem E. Zbiór E jako niepusty i ograniczony z góry ma kres górny. Niech $a = \sup E$. Istnieje ciąg o wyrazach $x_n \in E$ zbieżny do a, więc

$$e^a = \lim_{n\to\infty} e^{x_n} \leqslant y.$$

Z drugiej strony $a + 1/n \notin E$, więc

$$e^a = \lim_{n\to\infty} e^{a+1/n} \geqslant y,$$

co kończy dowód. $\square$

Stąd i z własności (3) potęgi wnioskujemy, że funkcja wykładnicza

$$\exp : \boldsymbol{R} \to (0, \infty)$$

jest wzajemnie jednoznacznym przekształceniem $\boldsymbol{R}$ na półprostą $(0, \infty)$. Istnieje zatem funkcja do niej odwrotna

$$\log : (0, \infty) \to \boldsymbol{R},$$

którą nazywamy *funkcją logarytmiczną.*

3.14. *Funkcja logarytmiczna ma następujące własności:*

1. $\log$ *jest funkcją ściśle rosnącą,*

2. $\log 1 = 0, \qquad \log e = 1,$

3. $\log x \cdot y = \log x + \log y, \qquad x, y > 0,$

4. $a^x = e^{x \log a}, \qquad a > 0,\ x \in \boldsymbol{R},$

5. $\log a^x = x \log a, \qquad a > 0,\ x \in \boldsymbol{R}.$

Dowód. Pierwsze trzy własności są natychmiastową konsekwencja tego, że *log* jest funkcją odwrotną do wykładniczej. Własność czwarta wynika stąd, że

$$e^{x \log a} = \left(e^{\log a}\right)^x = a^x.$$

Ostatnia własność wynika z poprzedniej przez zlogarytmowanie. $\square$

Poniższe nierówności mają podstawowe znaczenia dla badania funkcji logarytmicznej.

3.15. Wniosek. *Dla każdego* $0 \neq x > -1$

$$\frac{x}{1+x} < \log(1+x) < x.$$

Dowód. Logarytmując pierwszą z nierówności Wniosku 3.9 dla $0 \neq x > -1$, otrzymujemy drugą z nierówności dla logarytmu. Druga z nierówności Wniosku 3.9

$$e^x < 1 + \frac{x}{1-x}, \qquad 0 \neq x < 1,$$

po podstawieniu $y = \frac{x}{1-x} > -1$, daje

$$e^{\frac{y}{1+y}} < 1 + y, \qquad y > -1,$$

a stąd przez zlogarytmowanie otrzymujemy pierwszą z naszych nierówności. $\square$

Dla $x = \frac{1}{n}$ otrzymujemy

3.16. Wniosek. *Dla każdego* $n \in \boldsymbol{N}$

$$\frac{1}{n+1} < \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}.$$

3.17. Wniosek. *Dla każdego* $0 < \alpha \leqslant 1$ *i każdego* $x > 0$

$$\log(1+x) < \frac{1}{\alpha}\, x^\alpha.$$

Dowód. Mamy
$$\alpha \log(1+x) = \log(1+x)^\alpha < \log(1+x^\alpha) < x^\alpha,$$
skąd po podzieleniu przez α dostajemy żądaną nierówność. Skorzystaliśmy tu z nierówności $(1+x)^\alpha < 1+x^\alpha$. □

3.18. Lemat. *Ciąg*
$$\gamma_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n$$
jest zbieżny.

Dowód. Zwróćmy najpierw uwagę, że
$$\log(n+1) - \log n = \log(1+1/n) \longrightarrow 0,$$
więc wystarczy rozważać ciąg
$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log(n+1) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \big(\log(k+1) - \log k\big) = \sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{1}{k} - \log(1+1/k)\Big). \end{aligned}$$
Z Wniosku 3.16 wynika, że ciąg $\{c_n\}$ jest rosnący, a ponadto
$$\sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{1}{k} - \log(1+1/k)\Big) < \sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\Big) = 1 - \frac{1}{n+1} < 1,$$
więc jest również ograniczony. Jest zatem zbieżny, a przecież o to chodziło. □

Granicę ciągu $\{\gamma_n\}$ będziemy oznaczać przez γ i nazywać *stałą Eulera*. Zatem
$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \log\Big(1+\frac{1}{k}\Big)\right). \tag{3.19}$$
Dokładne oszacowanie stałej Eulera jest sprawą bardzo trudną. Wspomnijmy tu jedynie, że nie wiadomo nawet, czy jest ona liczbą wymierną, czy nie.

A oto interesujące zastosowanie ciągu Eulera.

3.20. *Jeżeli ciąg* $a_n > 0$ *spełnia warunek*
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant 1 - \frac{a}{n+1}, \qquad n \in \boldsymbol{N},$$
dla pewnego $a > 0$, *to jest malejący i dąży do zera.*

Dowód. Mamy
$$a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_2}{a_1} \cdot a_1,$$
więc
$$\log a_n \leqslant \sum_{k=1}^{n} \log\Big(1 - \frac{a}{n}\Big) + \log a_1 \leqslant -a\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \log a_1 < -a\log(n+1) + \log a_1,$$
skąd
$$a_n \leqslant a_1(n+1)^{-a}.$$
□

Przechodzimy teraz do definicji funkcji hiperbolicznych i trygonometrycznych. Funkcje

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

nazywamy odpowiednio *cosinusem* i *sinusem hiperbolicznym.* Wprost z definicji łatwo wynikają następujące własności tych funkcji. *Cosinus* hiperboliczny jest funkcją parzystą, a *sinus* nieparzystą. Ponadto zachodzi wzór

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1,$$

zwany *jedynką hiperboliczną.* Nietrudno też spostrzec, że sinh jako suma dwóch funkcji ściśle rosnących jest funkcją ściśle rosnącą. Stąd i z jedynki hiperbolicznej wnioskujemy, że cosh jest funkcją ściśle rosnącą na półprostej $[0, \infty)$. Wreszcie z Twierdzenia 3.7 wynika, iż

$$\cosh x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \qquad \sinh x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Wbrew pozorom podanie ścisłej analitycznej definicji funkcji trygonometrycznych nie jest wcale proste. Jednym z możliwych rozwiązań jest skorzystanie z następującego twierdzenia.

3.21. Twierdzenie. *Istnieje dokładnie jedna para funkcji*

$$s : \boldsymbol{R} \mapsto \boldsymbol{R}, \qquad c : \boldsymbol{R} \mapsto \boldsymbol{R}$$

o następujących własnościach. Dla wszystkich $x, y \in \boldsymbol{R}$

1. $s(x)^2 + c(x)^2 = 1,$
2. $s(x+y) = s(x)c(y) + s(y)c(x),$
3. $c(x+y) = c(x)c(y) - s(x)s(y),$
4. $0 < xc(x) < s(x) < x$ *dla* $0 < x < 1.$

Są to oczywiście niektóre z dobrze znanych własności funkcji trygononometrycznych *cosinusa* i *sinusa.* Nasze twierdzenie mówi, że wyszczególnione wyżej własności są aksjomatyczne w tym sensie, że można z nich wywieść wszystko, co skądinąd wiemy o funkcjach trygonometrycznych, a także że są one wystarczające do jednoznacznego określenia tych funkcji. Nawiasem mówiąc, ta druga część twierdzenia (jednoznaczność) przysparza więcej kłopotu. Część pierwsza jest bardziej elementarna, choć nieco żmudna. W szczególności dowodzi się, że

3.22. Wniosek. *Funkcje s i c mają wspólny okres podstawowy T, który jest liczbą niewymierną. Tradycyjnie oznaczamy $\pi = T/2$. Liczby postaci $k\pi$, gdzie $k \in \boldsymbol{Z}$ to wszystkie miejsca zerowe funkcji s.*

Tak więc definicja liczby π ukryta jest we własnościach funkcji trygonometrycznych.

Nie będziemy dowodzić tego twierdzenia, ani nawet systematycznie wyprowadzać pozostałych własności funkcji trygonometrycznych. Podkreślmy jednak wyraźnie, że np. ciągłość funkcji trygonometrycznych, jak i okresowość wraz z wszystkimi innymi ich cechami są na mocy Twierdzenia 3.21 konsekwencją własności (1)–(4).

3.23. Lemat. *Ciąg $b_n = \sin n$ nie jest zbieżny do zera.*

Dowód. Pokażemy, że jest rzeczą niemożliwą, aby prawie wszystkie wyrazy naszego ciągu leżały w przedziale $(-1/2, 1/2)$. Przypuśćmy nie wprost, że

$$|\sin n| < 1/2, \qquad n \geqslant N.$$

Wtedy dla takich n
$$\cos^2 n = 1 - \sin^2 n > \frac{3}{4},$$
więc
$$\sin^2 n = \frac{\sin^2 2n}{4\cos^2 n} < \frac{1}{4 \cdot 3}.$$
Powtarzając to rozumowanie, pokazujemy, że
$$\sin^2 n < \frac{1}{4 \cdot 3^p}$$
dla każdego $p \in \boldsymbol{N}$, co pociąga $\sin n = 0$ dla $n \geqslant N$. Wtedy jednak $N = k\pi$ dla pewnego k, czyli $\pi = N/k$. To już jest sprzeczność, bo przecież π jest liczbą niewymierną. $\square$

Zadania

1. Udowodnij, że potęga o dodatniej podstawie i wykładniku wymiernym ma własności a) – c) z wykładu.

2. Udowodnij, że funkcja wykładnicza o podstawie $a > 1$ jest ściśle rosnąca.

3. Niech $a > 0$. Pokaż, że dla wszystkich $x, y \in \boldsymbol{R}$ jest $(a^x)^y = a^{xy}$.

4. Wyprowadź własności 1) – 3) funkcji logarytmicznej podane na wykładzie.

5. Korzystając z nierówności Bernoulliego, pokaż, że funkcja $f(x) = (1 + \frac{1}{x})^x$ jest ściśle rosnąca dla $x \geqslant 1$.

6. Niech $0 < a_n \to a > 0$ i $\boldsymbol{R} \ni x_n \to x$. Pokaż, że $a_n^{x_n} \to a^x$.

7. Czy $a_n^n \to 0$, jeśli $a_n \to 0$?

8. Wykaż, że $\sqrt[n]{e}$ jest liczbą niewymierną dla każdego $n \in \boldsymbol{N}$.

9. Przeprowadź dyskusję zbieżności ciągu $u_n = (1 + \frac{1}{n^p})^{n^q}$ w zależności od $p, q > 0$.

10. Udowodnij, że dla każdego $\alpha > 0$ jest $\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n^\alpha} = 0$.

11. Wyjaśnij schemat

$$\log n << n^{\frac{1}{k}} << n^k << 2^n << n! << n^n.$$

12. Udowodnij nierówność

$$e^y < 1 + \frac{y}{1 - \frac{1}{2}y} \qquad 0 < y < 2.$$

13. Udowodnij nierówność

$$\frac{x}{1 + \frac{1}{2}x} < \log(1 + x), \qquad x > 1.$$

14. Udowodnij nierówność $e^x \geqslant ex$ dla $x > 0$. Pokaż też, że równość zachodzi jedynie dla $x = 1$.

15. Niech $1 \neq a > 0$. Pokaż, że $a^a > a$ oraz $a^{1/a} \leqslant e^{1/e}$.

16. Wyprowadź nierówność $\log(1 + x) > \frac{x}{1+\frac{1}{2}x}$ dla $x > 0$.

17. Pokaż, że $\log(1 + y) < \frac{1}{\alpha} y^\alpha$ dla $y > 0$ i $0 < \alpha \leqslant 1$.

18. Pokaż, że

$$\log 2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k}.$$

19. Pokaż, że $2/3 < \log 2 < 2/e$. W tym celu skorzystaj m.in. z nierówności $e^x > ex$.

20. Pokaż, że $e^{e^n} >> e^n$ oraz $\log\log n << \log n$.

21. Wykaż, że $\cosh x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!}$, $\sinh x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$.

22. Udowodnij nierówności

$$1 + \frac{a}{n+1} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^a < 1 + \frac{a}{n}, \qquad a < 1,\ 0 \neq n \in \boldsymbol{Z}.$$

23. Udowodnij nierówności

$$1 + \frac{a}{n} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^a < 1 + \frac{a}{n-a}, \qquad n > a > 1 \text{ lub } n < 0.$$

24. Wiedząc, że $a_n \to a$, oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a_n}{n}\right)^n.$$

25. Udowodnij że funkcje $\sinh : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ i $\cosh : [0,\infty) \to \boldsymbol{R}$ są ściśle rosnące i wyprowadź wzory na funkcje odwrotne:

$$\sinh^{-1} y = \log\left(y + \sqrt{y^2+1}\right), \qquad \cosh^{-1} y = \log\left(y + \sqrt{y^2-1}\right).$$

26. Udowodnij, że dla każdego $n \in \boldsymbol{N}$ stała Eulera γ spełnia nierówności

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log(n+1) < \gamma < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n.$$

27. Niech $0 < b < 1$. Pokaż, że dla każdego $0 < a < b$

$$1 + \frac{a}{n} \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)^b$$

dla dostatecznie dużych n.

28. Udowodnij, że dla każdego $p > 0$ ciąg

$$a_n = \frac{\log^p n}{n}, \qquad n \in \boldsymbol{N},$$

jest (począwszy od pewnego miejsca) ściśle malejący.

29. Niech $b > a > 0$. Uzasadnij nierówności

$$\frac{1}{b} < \frac{\log b - \log a}{b - a} < \frac{1}{a}, \qquad e^a < \frac{e^b - e^a}{b - a} < e^b,$$

korzystając z nierówności już znanych.

30. Pokaż, że dla każdego $n \in \boldsymbol{N}$

$$\log n \leqslant n(n^{1/n} - 1) \leqslant n^{1/n} \log n,$$

a wobec tego

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(n^{1/n} - 1)}{\log n} = 1.$$

31. Udowodnij, że

$$\log 4 = 1 + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(4k^2 - 1)}.$$