4. Granica i ciągłość funkcji

W niniejszym rozdziale wprowadzamy pojęcie granicy funkcji, definiujemy funkcje ciągłe i omawiamy ich podstawowe własności.

Niech f będzie funkcją określoną na przedziale (a,b) lub na zbiorze $(a,b)\setminus\{x_0\}$, gdzie $x_0\in(a,b)$. Mówimy, że funkcja f ma w punkcie x_0 *granicę właściwą* równą g, jeśli dla każdego ciągu $x_0\neq x_n\in(a,b)$ zbieżnego do x_0 zachodzi $\lim_{n\to\infty}f(x_n)=g$. Piszemy wówczas

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=g.$$

Ta definicja pochodzi od Heinego.

4.1. Przykład. Tytułem przykładu, zauważmy, że

$$\lim_{x\to 0}\sin x=0, \tag{4.2}$$

gdyż jeśli $0\neq x_n\xrightarrow{n\to\infty}0$, to również $|x_n|\xrightarrow{n\to\infty}0$, a skoro

$$|\sin x_n|\leqslant|x_n|,$$

to także

$$\sin x_n\xrightarrow{n\to\infty}0.$$

Wynika stąd natychmiast, że

$$\lim_{x\to 0}\cos x=1.$$

Rzeczywiście, jeśli $0\neq x_n\to 0$, to od pewnego miejsca $|x_n|<\frac{\pi}{2}$ i wtedy

$$\cos x_n=(1-\sin^2 x_n)^{\frac12}\to 1.$$

4.3. Przykład. Następny przykład ilustruje sytuację, gdy punkt x_0, w którym obliczamy granicę, nie leży w dziedzinie funkcji. Niech

$$f(x)=\frac{\sin x}{x},\qquad x\neq 0.$$

Obliczymy granicę tej funkcji w punkcie $x_0=0$. W tym celu zauważmy, że dla dowolnego $0\neq|x|<1$ mamy

$$|\sin x|<|x|<\frac{|\sin x|}{\cos x},$$

a zatem

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1$$

Weźmy teraz dowolny ciąg $0\neq x_n\to 0$. Ponieważ dla dużych n

$$\cos x_n<\frac{\sin x_n}{x_n}<1$$

oraz $\lim_{x\to 0}\cos x=1$, więc

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

4.4. Przykład. Rozważmy jeszcze funkcję

$$f(x)=x\sin(1/x),\qquad x\in\boldsymbol{R}\setminus\{0\}.$$

Zauważmy, że

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}x\sin(1/x)=0,$$

gdyż dla dowolnego ciągu $0\neq x_n\to 0$ mamy

$$|x_n\sin(1/x_n)|=|x_n|\cdot|\sin(1/x_n)|\leqslant|x_n|\to 0.$$

4.5. Przykład. Kolejny przykład to funkcja $f\colon \boldsymbol{R} \to [0,1)$ zadana wzorem
$$f(x) = \mathbf{m}(x).$$
Nie ma ona granicy w żadnym punkcie $x_0 = c \in \boldsymbol{Z}$, gdyż na przykład dla ciągów
$$x_n = c - \frac{1}{2n} \to c, \qquad y_n = c + \frac{1}{2n} \to c$$
otrzymujemy
$$f(x_n) = \mathbf{m}\Big(c - \frac{1}{2n}\Big) = 1 - \frac{1}{2n} \to 1,$$
$$f(y_n) = \mathbf{m}\Big(c + \frac{1}{2n}\Big) = \frac{1}{2n} \to 0.$$
W podobny sposób pokażemy, że funkcja
$$f(x) = \sin\frac{1}{x}, \qquad x \in \boldsymbol{R} \setminus \{0\},$$
nie ma granicy w punkcie $x_0 = 0$. Rozważmy bowiem ciągi
$$x_n = \Big(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\Big)^{-1} \to 0, \qquad y_n = (2\pi n)^{-1} \to 0.$$
Otrzymujemy
$$f(x_n) = \sin\Big(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\Big) = 1,$$
oraz
$$f(y_n) = \sin(2\pi n) = 0,$$
a zatem
$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 1 \neq 0 = \lim_{n\to\infty} f(y_n).$$

4.6. Przykład. Sprawdzimy jeszcze, że dla $a > 0$
$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a.$$
Mamy bowiem
$$\frac{a^x - 1}{x} = \frac{e^{x\log a} - 1}{x} = \log a + \frac{r_2(x\log a)}{x},$$
gdzie dla $|x|$ dostatecznie bliskich zera $|r_2(x\log a)| \leqslant x^2\log^2 a$, co pokazuje, że drugi składnik sumy dąży do zera.

4.7. Przykład. Niech $0 < a \leqslant b$. Wtedy dla każdego $x \neq 0$
$$a \leqslant \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{1/x} \leqslant b,$$
więc wyrażenie stojące w środku, oznaczmy je przez $S_x(a,b)$, można uważać za rodzaj średniej liczb a, b. I rzeczywiście,
$$S_{-1}(a,b) = \left(\frac{a^{-1} + b^{-1}}{2}\right)^{-1}, \qquad S_1(a,b) = \frac{a+b}{2}$$
są odpowiednio średnią harmoniczną i arytmetyczną tych liczb. Pokażemy, że
$$\lim_{x\to 0} S_x(a,b) = \sqrt{ab}.$$
W tym celu zauważmy najpierw, że
$$S_x(a,b) = a\left(\frac{1 + c^x}{2}\right)^{1/x} = aF(x),$$

gdzie $c = b/a$. Mamy więc

$$F(x) = \exp\Big(\frac{1}{x}\log\frac{1+c^x}{2}\Big),$$

gdzie wykładnik spełnia nierówności

$$\frac{c^x-1}{x(c^x+1)} < \frac{1}{x}\log\frac{1+c^x}{2} < \frac{c^x-1}{2x}.$$

Na mocy poprzedniego przykładu obie skrajne funkcje dążą do $\frac{\log c}{2}$, więc

$$\lim_{x\to 0} F(x) = e^{\frac{\log c}{2}} = \sqrt{c} = \sqrt{\frac{b}{a}},$$

a stąd natychmiast wynika nasza teza.

Podamy teraz inną definicję granicy funkcji w punkcie, która, jak pokażemy za chwilę, okaże się równoważna. Definicję tę sformułował Cauchy.

Niech $x_0 \in (a,b)$ i $f:(a,b)\to \boldsymbol{R}$ lub $f:(a,b)\setminus\{x_0\}\to\boldsymbol{R}$. Mówimy, że funkcja f ma w punkcie x_0 *granicę właściwą* równą g, jeśli

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\,\delta>0 \quad \forall x\in(a,b)\Big(0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-g|<\varepsilon\Big).$$

Mówiąc obrazowo, funkcja f ma w punkcie x_0 granicę równą g, jeżeli wartości funkcji są dowolnie bliskie liczbie g, pod warunkiem, że argumenty są dostatecznie bliskie x_0.

4.8. *Funkcja f ma w punkcie x_0 granicę równą $g\in\boldsymbol{R}$ w sensie Heinego dokładnie wtedy, gdy ma ją w sensie Cauchy'ego.*

Dowód. Przypuśćmy, że funkcja f ma granicę g w sensie Cauchy'ego równą g. Weźmy dowolny ciąg $x_n \neq x_0$ elementów dziedziny D funkcji f zbieżny do punktu x_0. Chcemy pokazać, że

$$f(x_n)\to g.$$

Ustalmy w tym celu dowolnie liczbę $\varepsilon>0$. Na mocy definicji Cauchy'ego istnieje taka liczba $\delta>0$, że

$$|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-g|<\varepsilon,$$

natomiast ze zbieżności ciągu $\{x_n\}$ wynika, że istnieje taka liczba $N\in\boldsymbol{N}$, że

$$|x_n-x_0|<\delta$$

dla $n>N$. Wobec tego dla takich n

$$|f(x_n)-g|<\varepsilon.$$

Przypuśćmy teraz, że funkcja nie ma granicy w sensie Cauchy'ego równej g. Wtedy istnieje takie $\varepsilon>0$, że dla każdego $\delta_n=\frac{1}{n}$ możemy znaleźć $x_0\neq x_n\in D$, takie że

$$|x_n-x_0|<\frac{1}{n} \quad \text{oraz} \quad |f(x_n)-g|>\varepsilon.$$

Pierwsza nierówność mówi, że ciąg $\{x_n\}$ jest, zbieżny do x_0, a druga, że ciąg wartości $\{f(x_n)\}$ nie jest zbieżny do g, co oznacza, że warunki granicy w sensie Heinego równej g też nie są spełnione. $\square$

4.9. Przykład. Zilustrujemy obie definicje na przykładzie granicy w punkcie $x_0 = 0$ funkcji
$$f(x) = \sin x^2.$$
Weźmy dowolny ciąg liczb niezerowych $\{x_n\}$ zbieżny do zera. Wtedy również
$$x_n^2 \to 0,$$
a stąd, na mocy równości (4.2),
$$\sin x_n^2 \to 0,$$
co oznacza, że
$$\lim_{x\to 0} \sin x^2 = 0$$
zgodnie z definicją Heinego.

Niech $\varepsilon > 0$. Ponieważ dla każdego x
$$|\sin x^2| < |x|^2,$$
więc jeżeli $|x| < \delta = \sqrt{\varepsilon}$, to
$$|\sin x^2| < |x|^2 < \delta^2 = \varepsilon,$$
co oznacza, że
$$\lim_{x\to 0} \sin x^2 = 0$$
zgodnie z definicją Cauchy'ego.

4.10 (Arytmetyka granic). *Jeśli funkcje f i g mają granice w punkcie x_0, to także funkcje $f+g$ oraz $f\cdot g$ mają w tym punkcie granice i*
$$\lim_{x\to x_0}(f+g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x),$$
$$\lim_{x\to x_0}(f\cdot g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x).$$
Ponadto, jeśli $\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$, to funkcja $1/g$ jest określona w bliskości punktu x_0 i
$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{g}(x) = \frac{1}{\lim_{x\to x_0} g(x)}.$$

Dowód tego faktu pozostawiamy Czytelnikowi jako ćwiczenie, przy którym warto pamiętać o analogicznej arytmetyce granic ciągów. Zauważmy jeszcze, że w dowolnym punkcie granica funkcji stałej określonej na całej prostej jest równa jej wartości. Stąd natychmiast otrzymujemy następujące wnioski.

4.11. Wniosek. *Jeśli funkcje f i g mają granice w punkcie x_0, to*
$$\lim_{x\to x_0} \alpha\cdot f(x) = \alpha\cdot \lim_{x\to x_0} f(x), \qquad \alpha \in \boldsymbol{R},$$
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)},$$
o ile $\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$.

4.12. Przykład. Dla dowolnej liczby naturalnej $n > 0$
$$\lim_{x\to 1} \frac{x^n - 1}{x-1} = n.$$
Wynika to z faktu, że dla $x \neq 1$
$$\frac{x^n-1}{x-1} = x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1,$$
gdzie każdy ze składników po prawej dąży do 1, gdy $x \to 1$.

4.13. Przykład. Poprzedni przykład można przy pewnym nakładzie pracy uogólnić. Niech $\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$ i niech $\beta \neq 0$. Wtedy

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^\alpha - 1}{x^\beta - 1} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Rzeczywiście, na mocy własności funkcji wykładniczej

$$\frac{x^\alpha - 1}{x^\beta - 1} = \frac{e^{\alpha \log x} - 1}{e^{\beta \log x} - 1} = \frac{\alpha \log x + r_2(\alpha \log x)}{\beta \log x + r_2(\beta \log x)},$$

gdzie $|r_2(y)| \leqslant y^2$ dla $|y| \leqslant 1$, więc

$$\frac{x^\alpha - 1}{x^\beta - 1} = \frac{\alpha + \frac{r_2(\alpha \log x)}{\log x}}{\beta + \frac{r_2(\beta \log x)}{\log x}},$$

gdzie

$$\left| \frac{r_2(\gamma \log x)}{\log x} \right| \leqslant |\gamma| |\log x|$$

dąży do zera, gdy x dąży do 1, dla $\gamma = \alpha$ i $\gamma = \beta$, co dowodzi naszej tezy.

4.14. Przykład. Granica w punkcie $x_0 = 0$ funkcji

$$f \colon \boldsymbol{R} \setminus \{0\} \ni x \longmapsto \frac{\cos x - 1}{x} \in \boldsymbol{R}$$

istnieje i wynosi zero. Mamy bowiem

$$f(x) = \frac{\cos x - 1}{x} = \frac{-2\sin^2(x/2)}{x} = -\frac{\sin(x/2)}{x/2} \cdot \sin(x/2)$$

i ponieważ pierwszy czynnik dąży do 1, a drugi do 0, to wobec (4.10) otrzymujemy

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0.$$

Zdefiniujmy teraz granice jednostronne funkcji. Niech $f : (a,b) \to \boldsymbol{R}$ i niech $x_0 \in (a,b]$. Mówimy, że f ma *granicę właściwą lewostronną* w punkcie x_0 równą α, jeśli dla każdego ciągu $x_n \in (a, x_0)$

$$f(x_n) \to \alpha$$

(wersja Heinego) lub równoważnie

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in (a, x_0) \Big(\, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon \, \Big).$$

Piszemy wtedy

$$\lim_{x \to x_0 -} f(x) = \alpha.$$

Zauważmy, że to, czy funkcja jest określona w $[x_0, b)$, nie ma żadnego znaczenia. Tak więc granica lewostronna jest dobrze zdefiniowana dla $x_0 \in (a, b]$.

W analogiczny sposób definiujemy *granicę prawostronną* funkcji w punkcie $x_0 \in [a, b)$, którą oznaczamy przez $\lim_{x\to x_0+} f(x)$.

4.15. Przykład. Obliczmy obie granice jednostronne części ułamkowej w punkcie $x_0 = 0$. Ponieważ dla dowolnego ciągu liczb ujemnych $\{x_n\}$ zbieżnego do zera

$$x_n > -1,$$

dla n większych od pewnego N, więc dla takich n

$$\mathbf{m}(x_n) = x_n - [x_n] = x_n + 1,$$

skąd

$$\mathbf{m}(x_n) \to 1,$$

czyli

$$\lim_{x \to 0-} \mathbf{m}(x) = 1.$$

Podobnie, w dowolnym ciągu liczb dodatnich $\{x_n\}$ zbieżnym do zera, od pewnego miejsca wyrazy są mniejsze od 1, więc ich część całkowita wynosi 0. Oznacza to, że dla dostatecznie dużych n

$$\mathbf{m}(x_n) = x_n,$$

czyli

$$\lim_{x \to 0+} \mathbf{m}(x) = 0.$$

4.16. *Jeśli funkcja f ma w pewnym punkcie x_0 obie granice jednostronne oraz*

$$\lim_{x \to x_0 -} f(x) = \lim_{x \to x_0 +} f(x) = \alpha,$$

to funkcja f ma w punkcie x_0 granicę równą α.

Dowód. Posłużymy się definicją Cauchy'ego. Niech będzie dany $\varepsilon > 0$. Z założenia wynika, że istnieją $\delta_1 > 0$ i $\delta_2 >$, takie że

$$|f(x) - \alpha| < \varepsilon, \qquad |f(y) - \alpha| < \varepsilon,$$

o ile $x_0 - \delta_1 < x < x_0$ i $x_0 < y < x_0 + \delta_2$. Niech $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Z powyższego widać natychmiast, że jeśli $0 < |z - x_0| < \delta$, to $|f(z) - \alpha| < \varepsilon$. □

4.17. Przykład. Pokażemy, że funkcja

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{dla } x < 0, \\ \sinh x & \text{dla } x \geqslant 0, \end{cases}$$

ma granicę w zerze. Istotnie, skoro dla dowolnego ciągu $\{x_n\}$ zbieżnego do zera $\lim_{n\to\infty} e^{x_n} = e^0 = 1$, więc

$$\lim_{x \to 0} e^x = 1,$$

a stąd

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} \sinh x &= \lim_{x \to 0+} \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = 0. \end{aligned}$$

Ponadto

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0-} \sin x = \lim_{x \to 0} \sin x = 0,$$

a zatem

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0.$$

4.18. Przykład. Sprawdzimy, że

$$\lim_{x \to 0+} x \log x = 0.$$

Rzeczywiście, niech $(0,1) \ni x_n \to 0$. Korzystając z nierówności

$$\log(1+z) < \frac{1}{\alpha}\, z^{\alpha}, \qquad z > 0, \qquad 0 < \alpha \leqslant 1,$$

dla $\alpha = 1/2$, widzimy, że

$$|x_n \log x_n| = \left|x_n \log(1/x_n)\right| \leqslant 2x_n\sqrt{1/x_n} \leqslant 2\frac{x_n}{\sqrt{x_n}} = 2\sqrt{x_n},$$

skąd natychmiast wynika nasza teza.

Mówimy, że funkcja f określona na przedziale $[a, b]$ jest *ciągła w punkcie* $x_0 \in [a, b]$, jeżeli dla każdego ciągu $\{x_n\} \subset [a, b]$

$$x_n \to x_0 \quad \text{implikuje} \quad f(x_n) \to f(x_0).$$

Mówimy, że funkcja f określona na zbiorze D jest *ciągła w przedziale* $I \subseteq D$, jeżeli jest ciągła w każdym punkcie tego przedziału.

4.19. Przykład. W rozdziale 3 pokazaliśmy, że

$$x_n \to x \quad \text{implikuje} \quad \exp(x_n) \to \exp(x).$$

Oznacza to, że funkcja wykładnicza

$$\boldsymbol{R} \ni x \longmapsto \exp(x)$$

jest ciągła w każdym punkcie $x \in \boldsymbol{R}$.

Z (4.10) wynika natychmiast

4.20. *Jeżeli funkcje f, g są ciągłe w pewnym punkcie x_0 należącym do dziedzin obu funkcji, to funkcje $f + g$ oraz $f \cdot g$ także są ciągłe w tym punkcie.*

4.21. Przykład. Wielomian jest funkcją ciągłą na $\boldsymbol{R}$. Istotnie, każdy wielomian jest funkcją postaci

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k,$$

wystarczy zatem sprawdzić, że dla dowolnych liczb $\alpha \in \boldsymbol{R}$ oraz $n \in \boldsymbol{N}$ funkcja

$$\boldsymbol{R} \ni x \longmapsto \alpha x^n$$

jest ciągła. Jeszcze raz korzystając z powyższego faktu, widzimy, że cała rzecz sprowadza się więc do ciągłości funkcji stałej i tożsamościowej $x \mapsto x$, a to jest oczywiste.

4.22. Przykład. Jak wiemy, funkcja logarytmiczna $\log : (0, \infty) \to \boldsymbol{R}$ jest funkcją odwrotną do wykładniczej, która jest ciągła. To pozwala wnioskować o ciągłości funkcji *log*. Rzeczywiście, niech $x_n \to x$ wraz z $n \to \infty$, gdzie x , $x_n > 0$. Ciąg $y_n = \log x_n$ jest ograniczony. Wystarczy zatem, że pokażemy, iż dla każdego zbieżnego do y podciągu $\{y_{n_k}\}_{k \in \boldsymbol{N}}$ jest $y = \log x$.

Istotnie, na mocy naszych założeń

$$x_{n_k} = e^{y_{n_k}},$$

gdzie ciąg po lewej jest zbieżny do x, a ten po prawej do e^y. Zatem $x = e^y$, czyli $y = \log x$.

W dowodzie Twierdzenia 4.39 poniżej jeszcze raz skorzystamy z tego rozumowania, aby uogólnić powyższy fakt. Tam też Czytelnik znajdzie więcej szczegółów.

4.23. Lemat. *Niech będą dane ciągłe funkcje $f, g : [a, b] \to \boldsymbol{R}$. Jeśli $f(w) = g(w)$ dla wymiernych $w \in [a, b]$, to $f = g$.*

Dowód. Niech $x \in [a,b]$. Niech $w_n \in [a,b]$ będzie ciągiem liczb wymiernych zbieżnym do x. Wtedy

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(w_n) = \lim_{n\to\infty} g(w_n) = g(x),$$

więc $f = g$. □

4.24. *Złożenie funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą, tzn. jeśli $f\colon I \to J$, $g\colon J \to K$ oraz f jest ciągła w punkcie $x \in I$ a g w punkcie $y = f(x)$, to funkcja $g \circ f\colon I \to K$ jest ciągła w x.*

Dowód. Dla dowolnego ciągu $\{x_n\} \subseteq I$ zbieżnego do x, z ciągłości funkcji f w punkcie x wynika, że

$$f(x_n) \to f(x) = y,$$

a stąd wobec ciągłości funkcji g w punkcie y

$$g(f(x_n)) \to g(y) = g(f(x)).$$

Pokazaliśmy więc, że dla każdego ciągu $\{x_n\} \subseteq I$

$$x_n \to x \quad \text{implikuje} \quad g \circ f(x_n) \to g \circ f(x),$$

co zgodnie definicją Heinego oznacza ciągłość funkcji $g \circ f$ w punkcie x. □

4.25. Przykład. Na mocy powyższego faktu, funkcja

$$f\colon (0,\infty) \ni x \longmapsto x^x = \exp(x \log x)$$

jest ciągła jako złożenie ciągłej funkcji wykładniczej z funkcją

$$x \longmapsto x \log x,$$

która jest iloczynem dwu funkcji ciągłych; jest więc także ciągła. Ponadto, możemy położyć w zerze taką wartość, aby przedłużenie f_1 funkcji f było nadal funkcją ciągłą. Mianowicie, z ciągłości funkcji wykładniczej wynika, że

$$\lim_{x\to 0+} x^x = \lim_{x\to 0+} e^{x \log x} = 1,$$

a stąd

$$f_1(x) = \begin{cases} x^x, & x > 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$$

jest ciągła na $[0,\infty)$.

4.26. Przykład. Funkcje trygonometryczne są ciągłe na swoich dziedzinach. Oczywiście wystarczy sprawdzić ciągłość funkcji *sinus* i *cosinus*. Ustalmy zatem dowolnie punkt $x_0 \in \boldsymbol{R}$ i weźmy dowolny ciąg $\{x_n\}$ zbieżny do niego. Wtedy

$$h_n = x_n - x_0 \to 0,$$

skąd (na mocy (4.10))

$$\begin{aligned} \sin x_n &= \sin(h_n + x_0) \\ &= \sin h_n \cdot \cos x_0 + \cos h_n \cdot \sin x_0 \to \sin x_0 \end{aligned}$$

i analogicznie

$$\begin{aligned} \cos x_n &= \cos(h_n + x_0) \\ &= \cos h_n \cdot \cos x_0 - \sin h_n \cdot \sin x_0 \to \cos x_0. \end{aligned}$$

4.27. Przykład. Ciekawym przykładem funkcji, która ma wiele punktów ciągłości, jak i nieciągłości, jest *funkcja Riemanna.*

4.28. Przykład. Niech f będzie funkcją określoną na całej prostej wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } x \notin \boldsymbol{Q}, \\ \frac{1}{q} & \text{gdy } x = \frac{p}{q}, \text{ gdzie } (p,q) = 1. \end{cases}$$

Pokażemy, że f jest ciągła dokładnie w punktach niewymiernych. Istotnie, jeśli $x_n \to x \notin \boldsymbol{Q}$, to wartości $f(x_n)$ są równe 0, gdy x_n są niewymierne, i równe mianownikom x_n, gdy x_n są wymierne. Ponieważ wartość graniczna x jest niewymierna, mianowniki te dążą do nieskończoności, co pokazuje, że

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0 = f(x).$$

Jeśli natomiast $x \in \boldsymbol{Q}$, to $f(x) \neq 0$, i istnieje ciąg liczb niewymiernych, np. $x_n = x + \frac{e}{n}$ zbieżny do x. Mamy więc

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0 \neq f(x).$$

Pamiętamy, że kresy górny i dolny zostały zdefiniowane dla podzbiorów $E \subset \boldsymbol{R}$ ograniczonych odpowiednio z góry i z dołu. Wygodnie będzie rozszerzyć związaną z tym notację, tak aby objąć nią także zbiory nieograniczone. W związku z tym przyjmiemy następującą definicję:

Jeśli $\boldsymbol{R} \supseteq E \neq \emptyset$ jest nieograniczony z góry, to będziemy mówić, że E ma *kres górny niewłaściwy* i pisać $\sup E = \infty$. Analogicznie, jeśli $\boldsymbol{R} \supseteq E \neq \emptyset$ jest nieograniczony z dołu, to będziemy mówić, że E ma *kres dolny niewłaściwy* i pisać $\inf E = -\infty$. Definicja ta pozwoli nam na przykład na pisanie $\sup E < \infty$, co jest oczywiście równoważne powiedzeniu, że zbiór E jest ograniczony od góry. Podobnie fakt, że zbiór E jest ograniczony od dołu możemy wyrazić krótko, pisząc $\inf E > -\infty$.

Mówimy, że *funkcja* $f\colon \emptyset \neq D \to \boldsymbol{R}$ *jest ograniczona z góry* (z dołu), jeśli jej zbiór wartości jest ograniczony z góry (z dołu), tzn.

$$\sup f(D) = \sup_{x\in D} f(x) < \infty \qquad \big(\inf f(D) = \inf_{x\in D} f(x) > -\infty\big).$$

4.29. Twierdzenie. *Funkcja ciągła na odcinku domkniętym jest ograniczona i osiąga swoje kresy.*

Dowód. Przypuśćmy, że

$$f\colon [a,b] \longrightarrow \boldsymbol{R}$$

jest ciągła i nieograniczona. Wtedy istnieje ciąg $\{x_n\} \subseteq [a,b]$ taki, że

$$|f(x_n)| \to \infty. \tag{4.30}$$

Ponieważ $\{x_n\}$ ograniczony, więc na mocy twierdzenia Bolzano-Weierstrassa istnieje podciąg $\{x_{n_k}\}_{k\in\boldsymbol{N}}$ zbieżny do pewnego x_0. Skoro

$$a \leqslant x_{n_k} \leqslant b, \qquad n \in \boldsymbol{N},$$

to również $a \leqslant x_0 \leqslant b$, tzn. x_0 należy do dziedziny f, i wobec ciągłości f

$$f(x_{n_k}) \to f(x_0),$$

co przeczy (4.30).

Pozostaje dowieść, że f przyjmuje wartość największą i najmniejszą. Niech

$$\alpha = \inf_{x\in[a,b]} f(x).$$

Z definicji kresu wynika, że istnieje ciąg $\{x_n\} \subset [a, b]$, taki że

$$f(x_n) \to \alpha.$$

Podobnie jak poprzednio wybieramy podciąg $\{x_{n_k}\}$ zbieżny do pewnego $x_0 \in [a, b]$. Wtedy

$$f(x_{n_k}) \to \alpha,$$

a z ciągłości funkcji f w punkcie x_0

$$f(x_{n_k}) \to f(x_0),$$

skąd $\alpha = f(x_0)$.

Analogicznie pokazujemy, że istnieje $x_1 \in [a, b]$ takie, że

$$f(x_1) = \sup_{x \in [a,b]} f(x),$$

co kończy dowód. □

4.31. Twierdzenie (Darboux). *Jeśli* $f\colon [a, b] \to \boldsymbol{R}$ *jest ciągła oraz*

$$f(a) < y < f(b),$$

to istnieje $c \in (a, b)$, *takie że* $f(c) = y$.

Dowód. Niech

$$E = \{x \in [a, b]\colon\ f(x) < y\}.$$

Skoro $a \in E$ i $b \notin E$, więc $\emptyset \neq E \subset [a, b)$. Jeśli przyjmiemy, że

$$c = \sup E,$$

to $a \leqslant c \leqslant b$ i istnieje ciąg $x_n \in E$, taki że

$$x_n \to c.$$

Z ciągłości funkcji f

$$f(x_n) \to f(c),$$

a ponieważ

$$f(x_n) < y, \qquad n \in \boldsymbol{N},$$

więc

$$f(c) \leqslant y, \qquad c < b. \tag{4.32}$$

Wybierzmy z odcinka $[a, b]$ ciąg zbieżny do c od góry, np.

$$z_n = c + (b - c)/n, \qquad n \in \boldsymbol{N}.$$

Wtedy

$$f(z_n) \to f(c) \quad \text{oraz} \quad f(z_n) \geqslant y, \quad n \in \boldsymbol{N},$$

więc wobec (4.32)

$$f(c) \geqslant y,$$

co dowodzi tezy. □

4.33. *Remark.* Oczywiście twierdzenie Darboux pozostaje prawdziwe, gdy $f(b) < y < f(a)$. Niech bowiem $g = -f$ i $z = -y$. Wtedy $g(a) < z < g(b)$ i istnieje $a < c < b$, takie że $g(c) = z$, czyli $f(c) = y$.

4.34. Wniosek. *Obrazem odcinka domkniętego przez funkcję ciągłą jest odcinek domknięty. Dokładniej, jeśli*

$$f\colon [a,b] \longrightarrow \boldsymbol{R}$$

jest ciągła, to

$$f\big([a,b]\big) = \big[\min_{x\in[a,b]} f(x)\ ,\ \max_{x\in[a,b]} f(x)\big].$$

Dowód. Na mocy Twierdzenia 4.29 funkcja f jest ograniczona i osiąga swoje kresy, czyli

$$\inf_{x\in[a,b]} f(x) = \min_{x\in[a,b]} f(x) = f(x_1)$$

oraz

$$\sup_{x\in[a,b]} f(x) = \max_{x\in[a,b]} f(x) = f(x_2)$$

dla pewnych $x_1, x_2 \in [a,b]$. Oczywiście

$$f\big([a,b]\big) \subseteq \big[f(x_1), f(x_2)\big]. \tag{4.35}$$

Na mocy twierdzenia Darboux dla każdego

$$y \in \Big(f(x_1)\,,\, f(x_2)\Big)$$

istnieje $c \in (x_1, x_2)$, takie że $f(c) = y$, więc

$$\big[f(x_1)\,,\, f(x_2)\big] \subseteq f\big([a,b]\big),$$

co wobec (4.35) daje tezę. □

4.36. Wniosek. *Jeśli*

$$f\colon\ (a,b) \longrightarrow \boldsymbol{R}$$

jest ciągła i różnowartościowa, to jest ściśle monotoniczna.

Dowód. Załóżmy nie wprost, że f nie jest monotoniczna, tzn. istnieją

$$a < x_1 < x_2 < x_3 < b, \tag{4.37}$$

takie że

$$f(x_1) < f(x_2) \qquad \text{i} \qquad f(x_2) > f(x_3),$$

albo

$$f(x_1) > f(x_2) \qquad \text{i} \qquad f(x_2) < f(x_3).$$

Bez zmniejszania ogólności załóżmy, że zachodzi pierwsza z koniunkcji. Wtedy istnieje

$$y \in \big(f(x_1), f(x_2)\big) \cap \big(f(x_3), f(x_2)\big),$$

skąd na mocy twierdzenia Darboux istnieją $c_1 \in (x_1, x_2)$, $c_2 \in (x_3, x_4)$, takie że

$$f(c_1) = y = f(c_2),$$

co wobec (4.37) oznacza, że $c_1 \neq c_2$ i tym samym jest sprzeczne z założeniem różnowartościowości funkcji f. □

I jeszcze jeden wniosek z twierdzenia Darboux.

4.38. Wniosek (o punkcie stałym). *Niech* $f : [a,b] \to [a,b]$ *będzie ciągła. Istnieje* $c \in [a,b]$*, takie że* $f(c) = c$.

Dowód. Rozważmy funkcję $g : [a, b] \to \boldsymbol{R}$ zadaną wzorem $g(x) = x - f(x)$. Chcemy pokazać, że g ma miejsce zerowe. Oczywiście, $g(a) \leqslant 0 \leqslant g(b)$, więc albo któryś z punktów a, b jest miejscem zerowym, albo

$$g(a) < 0 < g(b)$$

i wtedy na mocy własności Darboux istnieje $c \in (a, b)$, takie że $g(c) = 0$, bo przecież g jest funkcją ciągłą. Ale skoro tak, to $f(c) = c$, a o to nam przecież chodziło. □

4.39. Twierdzenie. *Jeśli*

$$f\colon\ [a, b] \longrightarrow [c, d]$$

jest ciągłą bijekcją, to

$$f^{-1}\colon\ [c, d] \longrightarrow [a, b]$$

jest również ciągła.

Dowód. Weźmy dowolny ciąg $\{y_n\} \subseteq [c, d]$ zbieżny do pewnego $y \in [c, d]$. Skoro

$$\{f^{-1}(y_n)\} \subseteq [\,a, b\,],$$

to na mocy twierdzenia Bolzano-Weierstrassa możemy wybrać podciąg zbieżny

$$f^{-1}(y_{n_k}) \to x.$$

Z ciągłości funkcji f

$$f\big(\,f^{-1}(y_{n_k})\,\big) \to f(x),$$

a ponieważ

$$f\big(\,f^{-1}(y_{n_k})\,\big) = y_{n_k} \to y,$$

więc $y = f(x)$, czyli $x = f^{-1}(y)$.

Skoro, jak pokazaliśmy, dowolny podciąg zbieżny ciągu ograniczonego $\{f^{-1}(y_n)\}$ jest zbieżny do tej samej liczby $f^{-1}(y)$, to

$$f^{-1}(y_n) \to f^{-1}(y),$$

co oznacza, że funkcja f^{-1} jest ciągła. □

Podaliśmy już w obu wersjach, Heinego i Cauchy'ego, precyzyjne definicje granicy liczbowej w punkcie oraz granic jednostronnych liczbowych w punkcie. W podobny sposób formułuje się definicję granicy liczbowej w $+\infty$ i w $-\infty$. I tak, dla funkcji f o dziedzinie $D \supseteq (-\infty, a)$, gdzie $a \in \boldsymbol{R}$, mamy

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to-\infty} f(x) = \alpha \\
\iff\quad &\forall\,\{x_n\} \subseteq D \quad \big(x_n \to -\infty \Rightarrow f(x_n) \to \alpha\big) \\
\iff\quad &\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,K < a \quad \forall\,x < K |f(x) - \alpha| < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Obok granic liczbowych (czyli właściwych) mamy jeszcze odpowiadające im granice niewłaściwe. I tak, mówimy, że funkcja $f : (a, b) \to \boldsymbol{R}$ ma *granicę niewłaściwą* w punkcie x_0 równą $\pm\infty$, jeśli dla każdego ciągu $x_0 \not\in (a, b)$

$$x_n \to x_0 \quad \text{implikuje} \quad f(x_n) \to \pm\infty.$$

Są jeszcze granice właściwe i niewłaściwe w nieskończoności, gdzie zbieżność $x \to x_0$ zastępuje się zbieżnością $x \to \pm\infty$. Ponadto trzeba jeszcze wspomnieć granice jednostronne właściwe i niewłaściwe w nieskończoności. Czytelnik zechce sam sformułować odpowiednie definicje w wersji Heinego i Cauchy'ego. Dla przykładu

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \\
\iff \quad & \forall\,\{x_n\} \quad \big(x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to -\infty \big) \\
\iff \quad & \forall\, K < 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \big(|x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < K \big)
\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to \infty} f(x) = -\infty \\
\iff \quad & \forall\,\{x_n\} \quad \big(x_n \to \infty \Rightarrow f(x_n) \to -\infty \big) \\
\iff \quad & \forall\, K < 0 \quad \exists\, M > 0\, \forall\, x > M \quad f(x) < K.
\end{aligned}$$

Zadania

1. Oblicz granice $\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x}$, $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}$, $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x\sin 2x)}{x^2}$.

2. Oblicz granice $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$, $\lim_{x\to a}\frac{\log\frac{x}{a}}{x-a}$, $\lim_{x\to a}\frac{a^x-x^a}{x-a}$.

3. Oblicz granice $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$, $\lim_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x^m-1}$, $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}$, gdzie $n,m\in\boldsymbol{N}$.

4. Oblicz granicę $\lim_{x\to 1}\frac{x^\alpha-1}{x^\beta-1}$ dla $\alpha,\beta\in\boldsymbol{R}$, $\beta\neq 0$.

5. Oblicz granice $\lim_{x\to 0}x[\frac{1}{x}]$, $\lim_{x\to 0+}\frac{[x]}{x}$.

6. Oblicz granice $\lim_{x\to 0}e^{-\frac{1}{|x|}}$, $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}$, $\lim_{x\to 0}(\log\frac{1}{x})^{\log x}$.

7. Oblicz granice $\lim_{x\to 0}(\sin x)^{\sin x}$, $\lim_{x\to 0}(\sin x)^{\log(1+x)}$.

8. Oblicz granice: $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+5}{x^2-3}$, $\lim_{x\to 1}\frac{x}{x-1}$, $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x}$, $\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1}$, $\lim_{x\to -2}\frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$, $\lim_{x\to 1/2}\frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$, $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$, $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$, $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$, $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$.

9. Oblicz granice $\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x-b}-\sqrt{a-b}}{x^2-a^2}$, gdzie $a>b$, $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1-x^2}-\sqrt[4]{1-2x}}{x+x^2}$.

10. Oblicz granice $\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x}$, $\lim_{x\to 0}\log|x|$, $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+1}{x^2-1}$, $\lim_{x\to\pi/2-}\operatorname{tg}x$, $\lim_{x\to\infty}x^{1/x}$, $\lim_{x\to\infty}e^{-x^2}$.

11. Oblicz $\lim_{x\to-\infty}\log(e+1/x)$, $\lim_{x\to\infty}(1+1/x)^x$. $\lim_{x\to-\infty}(1+1/x)^x$, $\lim_{x\to\infty}(1+x)^{1/x}$.

12. Znajdź granice jednostronne funkcji $f(x)=\frac{1}{1+2^{1/x}}$ w punkcie $x=0$.

13. Pokaż, że dla każdego niestałego wielomianu f jest $\lim_{x\to\infty}|f(x)|=\infty$.

14. Udowodnij, że każdy wielomian φ stopnia 3 przyjmuje wartości różnych znaków. Korzystając z własności Darboux, wywnioskuj, że φ ma pierwiastek.

15. Podaj przykład wielomianu stopnia 4, który nie ma pierwiastka. A co powiesz o wielomianach stopnia 5?

16. Niech

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\log(1+x)}{\sin(\sin ax)} & \text{dla } x<0;\\ b & \text{dla } x=0;\\ x+c & \text{dla } x>0.\end{cases}$$

Dla jakich a,b,c funkcja ta jest ciągła w 0?

17. Pokaż, że $\log 2<\sqrt{3}-1$ oraz $\log 3<\sqrt{5}-1$.

18. Znajdź granice

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{7/2}-1}{x^{5/2}-1},\quad \lim_{x\to 1}\frac{x^\alpha-1}{x^\beta-1},\quad \lim_{x\to 1}\frac{x^\alpha-x^\beta}{x^\gamma-1},\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2},\quad \lim_{x\to 1}\frac{x^\alpha-1-\alpha\log x}{(x-1)^2},$$

gdzie $\alpha,\beta,\gamma>0$. Pamiętaj, że $e^z=1+z+z^2/2+r_3(z)$, gdzie $|r_3(z)|\leqslant\frac{1}{4}|z|^3$ dla $|z|\leqslant 1$.

19. Oblicz

$$\varphi(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n-x^{-n}}{x^n+x^{-n}},\qquad x>0,$$

i rozstrzygnij, czy φ jest funkcją ciągłą. Narysuj jej wykres.

20. Pokaż, że funkcje $f(x)=\sin\Big(\mathbf{m}(x)\pi\Big)$ i $g(x)=[x]\sin\pi x$ są ciągłe.

21. Pokaż, że funkcje $F(x)=\max\{f(x),g(x)\}$ i $G(x)=\min\{f(x),g(x)\}$ są ciągłe w każdym punkcie, w którym zarówno f, jak i g jest ciągła.

22. Pokaż, że równanie $2x = \sin x + 1$ ma w przedziale $0 < x < 1$ przynajmniej jedno rozwiązanie.

23. Dana jest funkcja ciągła $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, taka że $f(x) = 0$ dla $x \in \boldsymbol{Q}$. Znajdź jej wartości dla argumentów niewymiernych.

24. Korzystając z twierdzenia Darboux pokaż, że równanie $x2^x = 1$ ma przynajmniej jedno rozwiązanie w przedziale $(0, 1)$.

25. Dane jest równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$, w którym $b > 0$ i c są ustalone. Pokaż, że dla dostatecznie małych $|a| > 0$ równanie to ma dwa pierwiastki $x_1(a) < x_2(a)$. Znajdź $\lim_{a\to 0} x_1(a)$ i $\lim_{a\to 0} x_2(a)$.

26. Udowodnij, że funkcja $x \to x^{\frac{1}{1-x}}$ jest ściśle rosnąca na $(0, 1)$. W tym celu zauważ, że $x = 1 + (x - 1)$ i zastosuj nierówność Bernoulliego.

27. Pokaż, że funkcja $x \to x^x$ przyjmuje na odcinku $(0, 1]$ wartość minimalną dla $x = 1/e$. W tym celu zauważ, że funkcja $(1/x)^{1/x}$ na $[1, \infty)$ ma ten sam zbiór wartości i skorzystaj z nierówności $x^{1/x} \leqslant e^{1/e}$.

28. Znajdź wszystkie $x, y \in \boldsymbol{R}$ spełniające równanie $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x|^n + |y|^n} = 1$.

29. Znajdź wszystkie punkty nieciągłości funkcji $x \to \mathbf{m}\Big((-1)^{[x]}x\Big)$ i naszkicuj jej wykres.

30. Udowodnij, że jedyną funkcją ciągłą $f : \boldsymbol{R} \to (0, \infty)$ spełniającą warunki

$$f(x + y) = f(x)f(y), \qquad f(1) = e$$

jest funkcja $f(x) = e^x$.

31. Niech będą dane liczby dodatnie a i b. Niech $f(0) = \sqrt{ab}$ oraz

$$f(x) = \Big(\frac{a^x + b^x}{2}\Big)^{1/x}. \qquad x \neq 0,$$

Pokaż, że f jest funkcją ciągłą. Zinterpretuj wartości $f(-1), f(0), f(1)$.

32. Pokaż, że $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$ dla $\alpha \in \boldsymbol{R}$.

33. Pokaż, że $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.

34. Udowodnij, że funkcja $F(x) = \mathbf{m}(x)^{\mathbf{m}(x)}$ jest ciągła.

35. Znajdź granicę

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log\Big(1 + \sin x\Big)}{\sin\Big(\log(1 + x)\Big)}.$$

36. Wykaż, że a) równanie

$$e^x = 3x$$

ma rozwiązanie $0 < x_1 < 1$ i rozwiązanie $1 < x_2 < 2$, b) równanie

$$e^x = 2x$$

nie ma rozwiązań na $\boldsymbol{R}$.