5. Szeregi liczbowe

Niech będzie dany nieskończony ciąg liczbowy $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$. Ciąg

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

nazywamy ciągiem *sum częściowych* ciągu $\{a_k\}$. Jeżeli ciąg $\{A_n\}$ jest zbieżny, mówimy, że ciąg $\{a_k\}$ jest *sumowalny*, a granicę

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n$$

nazywamy jego *sumą* i oznaczamy przez $A = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Tak więc z definicji

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k,$$

o ile ciąg $\{a_k\}$ jest sumowalny.

5.1. *Uwaga.* Tradycyjna terminologia jest trochę inna. Za pomocą symbolu

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

oznacza się nie tylko sumę ciągu $\{a_k\}$, gdy jest on sumowalny. Używa się go także w przypadku ciągów niesumowalnych dla zaznaczenia samej *intencji* badania sumowalności ciągu. I tak zamiast *ciąg* $\{a_k\}$ *jest sumowalny* bądź *niesumowalny* mówi się *szereg* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *jest zbieżny* bądź *rozbieżny*, a zamiast *suma nieskończonego ciągu* $\{a_k\}$ mówi się *suma szeregu* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Podobnie sformułowanie *dany jest szereg* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ wyraża to samo, co *dany jest ciąg* $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$*, a my będziemy starali się rozstrzygnąć, czy jest on sumowalny i ewentualnie obliczyć jego sumę.*

Terminologia ta może wydawać się nieprecyzyjna, ale jest tak wygodna i tak powszechnie stosowana, że warto przy niej pozostać. W chwilach pomieszania, które często zdarzają się adeptom analizy, można zawsze sięgnąć do ścisłych definicji podanych wyżej.

Badanie zbieżności szeregów jest w istocie badaniem zbieżności ciągów specjalnego typu. Czytelnik przypomina sobie, że tego typu ciągi występowały już wcześniej w naszych rozważaniach. Oto przykłady szeregów zbieżnych:

1. $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1}{1-q}$, o ile $|q| < 1$,

2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to\infty}(1 - \frac{1}{n+1}) = 1$,

3. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = e^x$ dla $x \in \boldsymbol{R}$,

4. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \log 2$,

5. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} - \log(1 + \frac{1}{k}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log(1 + \frac{1}{k}) = \gamma$.

Wiemy również, że następujące szeregi są rozbieżne:

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \to \infty$,

2. $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} q^k$ dla $|q| \geqslant 1$,

3. $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k$,

Ten ostatni szereg jest rozbieżny, bo jego sumy częściowe $A_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$ nie mają granicy.

Wiemy, że ciąg zbieżny jest ograniczony. Dla szeregu oznacza to:

5.2. *Ciąg sum częściowych szeregu zbieżnego jest ograniczony.*

Zwróćmy uwagę, że szereg (3) z wyżej wymienionych szeregów rozbieżnych ma ograniczone sumy częściowe.

5.3. *Szereg* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *o wyrazach nieujemnych jest zbieżny, wtedy i tylko wtedy gdy ciąg* $\{A_n\}$ *jego sum częściowych jest ograniczony.*

Dowód. Rzeczywiście $a_k \geqslant 0$ pociąga $A_{n+1} \geqslant A_n$. Skoro ciąg sum częściowych jest rosnący, jego zbieżność jest równoważna ograniczoności. □

Jeżeli szereg $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ma wyrazy nieujemne, to w myśl powyższego faktu ciąg jego sum częściowych jest zbieżny do wartości liczbowej lub rozbieżny do nieskończoności. Dlatego będziemy pisać

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty,$$

aby krótko wyrazić zbieżność takiego szeregu, lub

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \infty,$$

aby zaznaczyć jego rozbieżność. Notacji tej *nie wolno* stosować do szeregów o wyrazach niekoniecznie nieujemnych!

5.4. *Jeśli szereg* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *jest zbieżny, to* $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

Dowód. Mamy

$$a_n = A_n - A_{n-1}, \qquad n \geqslant 2,$$

gdzie A_n oznacza n-tą sumę częściową, skąd natychmiast wynika teza. □

Nie należy jednak sądzić, że warunek $a_k \to 0$ jest wystarczający dla zbieżności szeregu. Świadczy o tym choćby szereg (1) z umieszczonej wyżej listy szeregów rozbieżnych.

Ostatni dowód nasuwa pewne ważne spostrzeżenie. Powiedzieliśmy wcześniej, że szeregi to ciągi specjalnego typu. Nie jest to całkiem ścisłe, bo sugeruje jakoby szeregi stanowiły pewną właściwą podklasę klasy wszystkich ciągów. Tymczasem nietrudno zauważyć, że *każdy* ciąg można przedstawić w postaci szeregu, kładąc

$$a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} (a_{k+1} - a_k) = \sum_{k=0}^{n} a'_k,$$

gdzie $a'_k = a_{k+1} - a_k$ i $a_0 = 0$. Krótko mówiąc, każdy ciąg $\{a_{k+1}\}$ jest ciągiem sum częściowych ciągu „pochodnych” $\{a'_k\}$. Lepiej więc powiedzieć, że badanie szeregów to badanie ciągów jako ciągów sum częściowych. Różnica polega na tym, że tu założenia formułuje się w terminach ciągu $\{a'_k\}$, a nie samego ciągu $\{a_k\}$.

5.5. Przykład. Szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin n$$

jest rozbieżny, bo ciąg $\{\sin n\}$ nie dąży do zera.

5.6. *Jeżeli szereg* $A = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *jest zbieżny, to zbieżny jest też każdy z szeregów*

$$R_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k, \qquad n \in \boldsymbol{N},$$

a ponadto

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 0.$$

Dowód. Rzeczywiście, jeśli

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k,$$

to sumy częściowe szeregu R_n są równe

$$R_n(m) = \sum_{k=n}^{m} a_k = A_m - A_{n-1},$$

więc $R_n(m) \to A - A_{n-1}$, gdy $m \to \infty$. Zatem

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} A - A_{n-1} = 0,$$

co było do okazania. □

5.7. *Szereg* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *jest zbieżny, wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego* $\varepsilon > 0$ *istnieje* $N \in \boldsymbol{N}$*, takie że*

$$\Big|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\Big| < \varepsilon$$

dla $n > m \geqslant N$*.*

Dowód. Jako że

$$\sum_{k=m+1}^{n} a_k = A_n - A_m,$$

gdzie A_n jest n-tą sumą częściową szeregu, rozpoznajemy warunek Cauchy'ego, który jest równoważny zbieżności ciągu $\{A_n\}$, a więc zbieżności szeregu. □

5.8. Wniosek. *Jeśli szereg* $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ *jest zbieżny, to także szereg* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *jest zbieżny, a ponadto*

$$\Big|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\Big| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|.$$

Dowód. Zbieżność szeregu $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ wynika z nierówności trójkąta:

$$\Big|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\Big| \leqslant \sum_{k=m+1}^{n} |a_k|$$

oraz (5.7). Jeśli w ostatniej nierówności przyjmiemy $m = 0$, otrzymamy nierówność

$$|A_n| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k|,$$

a po przejściu z n do nieskończoności drugą część tezy. □

Mówimy, że szereg $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ jest *bezwzględnie* (albo *absolutnie*) zbieżny, jeśli zbieżny jest szereg $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$. Wyżej pokazaliśmy więc, że szereg bezwzględnie zbieżny jest zbieżny. Zwróćmy uwagę, że szereg (4) z wyżej umieszczonej listy szeregów zbieżnych nie jest bezwzględnie zbieżny. Taki szereg nazywamy *warunkowo* zbieżnym.

5.9. Przykład. Rozpatrzmy następujący przykład. Niech będzie dany szereg o wyrazie ogólnym

$$a_k = \frac{3 + (-1)^k}{2^k}.$$

Jak widać

$$a_k \leqslant \frac{4}{2^k},$$

więc szereg jest zbieżny.

Wiemy, że zmiana skończonej ilości wyrazów w ciągu nie ma wpływu ani na jego zbieżność, ani na wartość granicy, o ile ta istnieje. Trochę inaczej wygląda sprawa z szeregami. Zmiana skończonej ilości wyrazów w szeregu oznacza dodanie pewnej stałej do wszystkich wyrazów ciągu sum częściowych począwszy od pewnego miejsca. Nie wpływa zatem na zbieżność szeregu, ale może wpłynąć na wartość jego sumy, gdy jest on zbieżny. W szczególności zbieżność szeregu

$$\sum_{k=N}^{\infty} a_k$$

dla jakiegokolwiek $N \in \boldsymbol{N}$ pociąga zbieżność całego szeregu $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Zajmijmy się teraz szeregami o wyrazach nieujemnych. Oto tak zwane *kryterium porównawcze* zbieżności szeregów.

5.10. *Niech będą dane dwa szeregi $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ i $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ o wyrazach nieujemnych, takich że $a_k \leqslant b_k$ dla dostatecznie dużych k. Wtedy zbieżność szeregu $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ pociąga zbieżność szeregu $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, a rozbieżność szeregu $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ pociąga rozbieżność szeregu $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$.*

Dowód. Rzeczywiście, istnieje wtedy $N \in \boldsymbol{N}$, takie że dla $n > N$ mamy

$$\sum_{k=N}^{n} a_k \leqslant \sum_{k=N}^{n} b_k,$$

więc ograniczoność szeregu o wyrazach b_k pociąga ograniczoność szeregu o wyrazach a_k i odwrotnie – nieograniczoność szeregu po lewej pociąga nieograniczoność tego po prawej. To na mocy (5.3) dowodzi naszej tezy. □

5.11. Przykład. Zauważmy, że nierówność

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)}, \qquad k > 1,$$

wraz ze zbieżnością szeregu $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)}$ dowodzi na mocy kryterium porównawczego, że

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty.$$

Ponadto

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 0.$$

5.12. Przykład. Można jednak pokazać więcej. Mianowicie

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2} \approx \frac{1}{n},$$

a dokładniej

$$\lim_{n\to\infty} n \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1.$$

W tym celu wystarczy zauważyć, że dla każdego $k \geqslant 2$

$$\frac{1}{k(k+1)} < \frac{1}{k^2} < \frac{1}{(k-1)k}.$$

Sumując względem $2 \leqslant n \leqslant k \leqslant m$, dostajemy

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{m+1} < \sum_{k=n}^{m} \frac{1}{k^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{m},$$

skąd po przejściu granicznym względem m

$$1 < n \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \frac{n}{n-1},$$

a stąd już nasza teza na mocy twierdzenia o trzech ciągach.

Porównując wyrazy danego szeregou z wyrazami szeregu geometrycznego, otrzymujemy kryteria d'Alemberta i Cauchy'ego.

5.13. Twierdzenie. *Niech będzie dany szereg $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ o wyrazach dodatnich. Jeżeli*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1,$$

to szereg jest zbieżny. Jeżeli natomiast

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1,$$

to szereg jest rozbieżny.

Dowód. Niech będzie spełniony pierwszy warunek. Niech $0 < \varepsilon < 1 - q$. Wtedy dla dostatecznie dużych $n \geqslant N$

$$a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \dots \frac{a_{N+1}}{a_N} \cdot a_N \leqslant C(q+\varepsilon)^n,$$

gdzie $C = \frac{a_N}{(q+\varepsilon)^N}$ i $q + \varepsilon < 1$. Zatem na mocy kryterium porównawczego szereg $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ jest zbieżny.

Niech teraz będzie spełniony drugi warunek. Wtedy ciąg $\{a_n\}$ jest od pewnego miejsca rosnący, wiec nie może być zbieżny do zera. Zatem szereg jest rozbieżny. □

Niestety kryterium d'Alemberta nie rozstrzyga nic w sytuacji, gdy

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = 1.$$

Tak się dzieje w przypadku szeregów

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}. \tag{5.14}$$

W obu przypadkach mamy
$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = 1,$$
a tymczasem pierwszy z tych szeregów jest rozbieżny, a drugi zbieżny.

5.15. Przykład. Rozważmy szeregi
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} 5^{-k}, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} b_k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} 3^{-k}.$$
Mamy
$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\binom{2k+2}{k+1} 5^{-k-1}}{\binom{2k}{k} 5^{-k}} = \frac{1}{5} \cdot \frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)^2} \xrightarrow{k} \frac{4}{5}$$
oraz
$$\frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{\binom{2k+2}{k+1} 3^{-k-1}}{\binom{2k}{k} 3^{-k}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)^2} \xrightarrow{n} \frac{4}{3},$$
więc pierwszy szereg jest zbieżny, a drugi rozbieżny. Przykład ten dobrze ilustruje ten wygodny fakt, że w praktycznych zastosowaniach wyrażenie $\frac{a_{k+1}}{a_k}$ często ma granicę.

Przechodzimy do kryterium Cauchy'ego.

5.16. Twierdzenie. *Niech będzie dany szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach nieujemnych. Jeżeli*
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_k} < 1,$$
to szereg jest zbieżny. Jeżeli natomiast
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1,$$
to szereg jest rozbieżny.

Dowód. Niech $0 < \varepsilon < 1 - q$. Pierwszy warunek oznacza, że dla dostatecznie dużych n
$$a_n \leqslant (q + \varepsilon)^n,$$
więc na mocy kryterium porównawczego szereg jest zbieżny.

Drugi warunek zaś implikuje $a_n \geqslant 1$ dla nieskończenie wielu n, więc ciąg $\{a_k\}$ nie dąży do zera, a to na mocy (5.4) oznacza, że szereg jest rozbieżny. □

Podobnie jak kryterium d'Alemberta, kryterium Cauchy'ego nie rozstrzyga nic w sytuacji, gdy
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1.$$
Można na poparcie tej tezy przytoczyć te same przykłady (5.14).

5.17. Przykład. Szereg
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$
jest zbieżny, bo
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e} < 1.$$

I jeszcze jedno kryterium badania zbieżności szeregów o wyrazach dodatnich (nieujemnych), zwane kryterium Cauchy'ego *przez zagęszczenie.*

5.18. *Niech $\{a_k\}$ będzie ciągiem malejącym liczb nieujemnych. Wówczas szereg $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ jest zbieżny, wtedy i tylko wtedy gdy szereg $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ jest zbieżny.*

Dowód. Rzeczywiście,

$$\sum_{k=1}^{2^N-1} a_k = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} a_k \leqslant \sum_{n=0}^{N-1} 2^n a_{2^n}$$

oraz

$$\sum_{k=1}^{2^N-1} a_k = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} a_k \geqslant \sum_{n=0}^{N-1} 2^n a_{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} 2^n a_{2^n},$$

bo wyrazów a_k dla $2^n \leqslant k < 2^{n+1}$ jest 2^n i na mocy naszych założeń najmniejszym jest $a_{2^{n+1}-1} \geqslant a_{2^{n+1}}$, a największym a_{2^n}. Z udowodnionych nierówności wynika teza. □

Wiemy już, że

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty,$$

a co za tym idzie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} < \infty, \qquad \alpha \geqslant 2,$$

oraz

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty,$$

i co za tym idzie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \infty, \qquad \alpha \leqslant 1.$$

Metodą przez zagęszczenie sprawdzimy pozostałe przypadki $1 < \alpha < 2$, a przy okazji za jednym zamachem potwierdzimy wyżej wymienone.

5.19. Wniosek. *Szereg* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ *jest zbieżny, wtedy tylko wtedy gdy* $\alpha > 1$.

Dowód. Rzeczywiście, jeśli $a_k = \frac{1}{k^\alpha}$, to

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{2^{\alpha k}} = \sum_{k=1}^{\infty} q^k,$$

a ostatni szereg, który jest szeregiem geometrycznym o ilorazie $q = 2^{1-\alpha}$, jest zbieżny dokładnie wtedy, gdy $\alpha > 1$. □

Niech

$$\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}.$$

Ile wynosi suma takiego szeregu? Odpowiedź nie jest łatwa. Rozstrzygniemy tu dwa przypadki $\alpha = 2$ i $\alpha = 4$.

5.20. *Mamy*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Dowód podamy w dalszej części skryptu.

5.21. Lemat. *Zachodzi równość*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{2}{5}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\Big)^2 = \frac{\pi^4}{90}.$$

Dowód. Dowodzimy tożsamości

$$\zeta(4) = \frac{2}{5}\zeta(2)^2.$$

Mamy

$$\zeta(2)^2 = \lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{j^2k^2}.$$

Zbadajmy więc sumy

$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{j^2k^2} = \sum_{j=1}^{N}\Big(\sum_{j\neq k=1}^{N} \frac{1}{j^2k^2} + \frac{1}{j^4}\Big) = \sum_{j=1}^{N}\sum_{j\neq k=1}^{N} \frac{1}{j^2k^2} + B_N,$$

gdzie

$$B_N = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{j^4}.$$

Zauważmy, że

$$\frac{1}{j^2k^2} = \frac{j^{-2} - k^{-2}}{k^2 - j^2}.$$

Zatem

$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{j\neq k=1}^{N} \frac{1}{k^2j^2} = 2\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{j^2} \sum_{j\neq k=1}^{N} \frac{1}{k^2 - j^2} = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{j^3} \sum_{j\neq k=1}^{N} \Big(\frac{1}{k-j} - \frac{1}{k+j}\Big).$$

Zwróćmy teraz uwagę, że

$$\sum_{j\neq k=1}^{N} \Big(\frac{1}{k-j} - \frac{1}{k+j}\Big) = \frac{3}{2j} - \sum_{k=N-j+1}^{N+j} \frac{1}{k},$$

więc ostatecznie

$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{j^2k^2} = \frac{5}{2}B_N - \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{j^3} \sum_{k=N-j+1}^{N+j} \frac{1}{k}.$$

Jak widać,

$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{j^2k^2} \xrightarrow{N} \zeta(2)^2, \qquad B_N \xrightarrow{N} \zeta(4),$$

więc wystarczy sprawdzić, że drugi składnik po prawej stronie dąży do zera.

Rzeczywiście

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{j^3} \sum_{k=N-j+1}^{N+j} \frac{1}{k} &< \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{j^3} \cdot \frac{2j}{N-j+1} \\ &= 2\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{j^2} \cdot \frac{1}{N-j+1} < \frac{4}{N} \sum_{j=1}^{[N/2]} \frac{1}{j^2} + 2 \sum_{j=[N/2]+1}^{N} \frac{1}{j^2}.\end{aligned}$$

Jako że

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} < \infty,$$

prawa strona dąży do zera wraz z $N \to \infty$.

□

Poniższe *kryterium Raabego* pozwala ono rozstrzygnąć niektóre przypadki, których nie rozstrzyga kryterium d'Alemberta.

5.22 (Raabe). *Niech będzie dany szereg o wyrazach* $a_n > 0$*. Jeśli*

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) > 1,$$

to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$*. Jeśli natomiast*

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) < 1,$$

to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$*.*

Dowód. Przypuśćmy, że spełniony jest pierwszy warunek. Niech $\varepsilon > 0$ będzie odpowiednio małe. Wtedy dla dostatecznie dużych n

$$(n+1)\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) > 1 + \varepsilon$$

Mnożąc obie strony nierówności przez a_n i przenosząc odpowiednio wyrazy otrzymujemy

$$\varepsilon a_n \leqslant n a_n - (n+1)a_{n+1}. \tag{5.23}$$

Oznaczmy

$$b_n = n a_n, \qquad n \geqslant 1.$$

Nierówność (5.23) pokazuje, że ciąg $\{b_n\}$ jest malejący, a więc zbieżny, co pociąga

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n - b_{n+1} < \infty.$$

Wracając do nierówności (5.23), widzimy, że

$$a_n \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\Big(b_n - b_{n+1}\Big), \qquad n \geqslant N,$$

a więc nasz szereg jest zbieżny na mocy kryterium porównawczego.

Drugi warunek dla dużych n implikuje

$$a_{n+1} \geqslant \frac{n-1}{n} \cdot a_n \geqslant \cdots \geqslant \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdots \frac{N-1}{N} \cdot a_N,$$

czyli

$$a_{n+1} \geqslant \frac{a_N}{Nn}.$$

Stosując raz jeszcze kryterium porównawcze, widzimy, że szereg jest rozbieżny. □

5.24. Przykład. Zdefiniujmy *symbol Newtona* dla dowolnych $a \in \boldsymbol{R}$ oraz $k \in \boldsymbol{Z}^+$. Niech

$$\binom{a}{k} = \frac{a(a-1)\dots(a-k+1)}{k!}, \qquad k \geqslant 1,$$

oraz

$$\binom{a}{0} = 1.$$

Nie nakładamy tu żadnych dodatkowych ograniczeń na a i k. Zauważmy jedank, że dla $a \in \boldsymbol{N}$ i $k > a$, mamy $\binom{a}{k} = 0$.

Rozważmy teraz szereg
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} \left| \binom{a}{k} \right|$$
i zbadajmy jego zbieżność za pomocą kryterium Raabego. Mamy
$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = 1 - \frac{a+1}{k+1}, \qquad k > a,$$
skąd natychmiast wynika, że nasz szereg jest zbieżny dla $a \geqslant 0$ i rozbieżny dla $a < 0$.

Tyle na razie na temat szeregów o wyrazach nieujemnych. Przechodzimy do szeregów o wyrazach dowolnych. Jeżeli taki szereg jest zbieżny bezwzględnie, to w zasadzie jego badanie sprowadza się do badania szeregu wartości bezwzględnych, który ma wyrazy nieujemne. Jeśli jednak jest zbieżny tylko warunkowo, sprawa jest znacznie delikatniejsza.

5.25. Twierdzenie (Leibniz). *Jeśli ciąg $\{a_k\}$ maleje monotonicznie do zera, to szereg*
$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$$
jest zbieżny.

Dowód. Widzimy, że parzyste sumy częściowe
$$A_{2n} = (a_0 - a_1) + (a_2 - a_3) + \cdots + (a_{2n-2} - a_{2n-1}) + a_{2n} \geqslant 0$$
są ograniczone z dołu i tworzą ciąg malejący, bo
$$A_{2n+2} - A_{2n} = a_{2n+2} - a_{2n+1} \leqslant 0,$$
natomiast sumy nieparzyste
$$A_{2n+1} = a_0 + (a_2 - a_1) + (a_4 - a_3) + \ldots (a_{2n} - a_{2n+1}) \leqslant a_0$$
są ograniczone z góry i tworzą ciąg rosnący, bo
$$A_{2n+3} - A_{2n+1} = a_{2n+2} - a_{2n+3} \geqslant 0.$$
Tak więc oba podciągi $\{A_{2n}\}$ i $\{A_{2n+1}\}$ są zbieżne i wobec
$$A_{2n} - A_{2n+1} = a_{2n+1} \to 0$$
mają wspólną granicę. Stąd ciąg sum częściowych jest zbieżny. □

5.26. Przykład. Oprócz znanego nam już dobrze szeregu *anharmonicznego*
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$
dobrymi przykładami na twierdzenie Leibniza są szeregi
$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \log\Big(1 + \frac{1}{k}\Big), \qquad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \Big(e - \Big(1 + \frac{1}{k}\Big)^k\Big).$$
Rzeczywiście ciągi
$$a_k = \frac{1}{k}, \qquad b_k = \log\Big(1 + \frac{1}{k}\Big), \qquad c_k = e - \Big(1 + \frac{1}{k}\Big)^k$$
są monotonicznie zbieżne do zera.

5.27. Przykład. Wiemy już, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \binom{a}{n}$$

jest bezwzględnie zbieżny dla $a \geqslant 0$. Pokażemy teraz, korzystając z kryterium Leibniza, że dla $-1 < a < 0$ szereg ten jest warunkowo zbieżny. Niech $b = 1 + a$. Wtedy

$$\binom{a}{n} = (-1)^n \prod_{k=1}^{n} \Big(1 - \frac{b}{k}\Big).$$

Jeśli

$$a_n = \prod_{k=1}^{n} \Big(1 - \frac{b}{k}\Big),$$

to

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{b}{n+1},$$

a więc ciąg (a_n) jest monotoniczny i dąży do zera.

Niech będzie dany ciąg $\{a_k\}$. Przypomnijmy oznaczenie

$$a'_k = a_{k+1} - a_k.$$

5.28. Lemat. *Niech będą dane dwa ciągi nieskończone $\{a_k\}$ i $\{B_k\}$. Dla dowolnych $m \leqslant n$ naturalnych zachodzi następująca tożsamość Abela:*

$$\sum_{k=m}^{n} a_k B'_k = (a_{n+1}B_{n+1} - a_m B_m) - \sum_{k=m}^{n} a'_k B_{k+1}.$$

Dowód. Wystarczy zauważyć, że

$$\sum_{k=m}^{n} (a_k B_k)' = a_{n+1}B_{n+1} - a_m B_m,$$

a ponadto

$$(a_k B_k)' = a'_k B_{k+1} + a_k B'_k,$$

co daje tezę. □

5.29. Wniosek (nierówność Abela). *Niech $\{a_k\}$ będzie ciągiem malejącym o wyrazach nieujemnych, a $\{B_k\}$ ciągiem ograniczonym. Wtedy dla dowolnych $m \leqslant n$ naturalnych*

$$\Big|\sum_{k=m}^{n} a_k B'_k\Big| \leqslant 2a_m \sup_{k \geqslant m} |B_k|.$$

Następujące *kryterium Dirichleta*, które można uważać za uogólnienie podanego wyżej kryterium Leibniza, wykorzystuje nierówność Abela.

5.30. Twierdzenie. *Jeżeli $\{a_k\}$ jest ciągiem monotonicznym i zbieżnym do zera, a ciąg sum częściowych ciągu $\{b_k\}$ jest ograniczony, to szereg $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ jest zbieżny.*

Dowód. Możemy przyjąć, że ciąg $\{a_k\}$ jest malejący. Oznaczmy

$$B_n = \sum_{k=1}^{n-1} b_k, \qquad n \geqslant 1$$

i niech $|B_n| \leqslant B$. Na mocy nierówności Abela

$$|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k| = |\sum_{k=0}^{n} a_k B'_k| \leqslant 2a_m \sup_{k \geqslant m} |B_k| \leqslant 2a_m B.$$

Jako że $a_m \to 0$, nasz szereg spełnia warunek Cauchy'ego, więc jest zbieżny.

□

Warto zatrzymać się na chwilę, aby lepiej zrozumieć kryterium Dirichleta. Przykład, który chcemy teraz zaprezentować, wymaga pewnych przygotowań.

Wiemy, że szereg $\sum_{k=1}^{\infty} \sin k$ jest rozbieżny. Okazuje się jednak, że jego sumy częściowe są ograniczone.

5.31. *Dla każdego x nie będącego parzystą wielokrotnością π*

$$\sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{\sin n\frac{x}{2} \cdot \sin(n+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

Dowód. Z prostej trygonometrii wynika, że

$$\sin\frac{x}{2} \cdot \sin kx = \frac{1}{2}\Big(\cos(k-\frac{1}{2})x - \cos(k+\frac{1}{2})x\Big).$$

Stąd

$$\sin\frac{x}{2}\sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{1}{2}\Big(\cos\frac{x}{2} - \cos(n+\frac{1}{2})x\Big) = \sin n\frac{x}{2} \cdot \sin(n+1)\frac{x}{2}.$$

□

5.32. Przykład. A oto nasz przykład. Niech $\{a_k\}$ będzie ciągiem malejącym do zera i niech $b_k = \sin k$. Z (5.31) wynika, że dla każdego n

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} b_k\Big| \leqslant \Big|\frac{\sin\frac{n}{2} \cdot \sin\frac{n+1}{2}}{\sin\frac{1}{2}}\Big| \leqslant \frac{1}{|\sin\frac{1}{2}|},$$

więc sumy częściowe ciągu $\{b_k\}$ są ograniczone. Na mocy twierdzenia Dirichleta szereg

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin k$$

jest więc zbieżny. W szczególności, szereg

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k}{k}$$

jest zbieżny.

Dość podobnym do kryterium Dirichleta jest *kryterium Abela.* Dobrze jest spojrzeć na to kryteriu w następującym kontekście. Jeśli szereg $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ jest zbieżny *bezwzględnie*, a ciąg $\{a_k\}$ jest ograniczony, to

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k b_k| < \infty,$$

co nietrudno wywnioskować z kryterium porównawczego. Innymi słowy, wyrazy szeregu bezwzględnie zbieżnego można pomnożyć przez wyrazy ciągu ograniczonego, a otrzymany szereg będzie nadal zbieżny bezwzględnie.wyrazy zbieżnego bezwzględnie szeregu można pomnożyć przez wyrazy ciągu ograniczonego, a zbiezność zostanie zachowana. Tak oczywiście nie jest dla szeregów warunkowo zbieżnych. Aby się o tym przekonać, wystarczy wyrazy szeregu anharmonicznego pomnożyć przez ograniczony ciąg $(-1)^{k+1}$. Tym bardziej godne uwagi jest następujące twierdzenie Abela, które mówi, że można to zrobić, jeśli ciąg $\{a_k\}$ jest *monotoniczny.*

5.33. Twierdzenie. *Niech* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *będzie szeregiem zbieżnym, a* $\{a_k\}$ *ograniczonym ciągiem monotonicznym. Wtedy szereg* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ *jest zbieżny.*

Dowód. Niech $a = \lim_k a_k$ i niech $\alpha_k = a_k - a$. Mamy[1]

$$a_k b_k = (a_k - a)b_k + ab_k = \alpha_k b_k + ab_k.$$

Tak więc każdy wyraz naszego szeregu przedstawia się jako kombinacja liniowa wyrazów dwóch szeregów zbieżnych. Szereg o wyrazach b_k jest zbieżny z założenia natomiast szereg o wyrazach $\alpha_k b_k$ jest zbieżny na mocy kryterium Dirichleta, bo $\alpha_k \to 0$ monotonicznie, a sumy częściowe $\sum_{k=1}^{n} b_k$ są ograniczone, gdyż, jak już powiedzieliśmy, szereg ten jest zbieżny. □

5.34. Przykład. Jeśli ciąg $\{a_k\}$ maleje do zera, a ciąg $\{b_k\}$ jest rosnący i ograniczony, to szereg

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k b_k$$

jest zbieżny. Istotnie, szereg $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$ jest zbieżny na mocy twierdzenia Leibniza, więc wolno go pomnożyć przez wyrazy ciągu rosnącego i ograniczonego bez utraty zbieżności.

Do końca rozdziału pozostaje jeszcze zagadnienie permutacji wyrazów w szeregu zbieżnym. Wiemy, że w szeregu można bezkarnie przestawić skończoną liczbę wyrazów, nie tracąc zbieżności, ani nie zmieniając jego sumy. Czy wolno jednak dokonać nieskończonej permutacji wyrazów?

Rozważania na ten temat poprzedzimy następującym spostrzeżeniem. Niech będzie dany szereg zbieżny o wyrazach a_n, wśród których jest nieskończenie wiele zarówno nieujemnych, jak i ujemnych. Oznaczmy prze x_k kolejne wyrazy nieujemne tego szeregu, a przez $-y_k$ kolejne wyrazy ujemne. Niech m_n będzie liczbą wyrazów nieujemnych o indeksach $\leqslant n$. Wtedy

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = X_{m_n} - Y_{n-m_n} = \sum_{k=1}^{n-m_n} x_k - \sum_{k=1}^{n} y_k, \tag{5.35}$$

gdzie $m_n \to \infty$ i $n - m_n \to \infty$. Ponadto

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k| = X_{m_n} + Y_{n-m_n}.$$

Stąd wynika, że zbieżność bezwarunkowa szeregu jest równoważna

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k < \infty \quad \text{oraz} \quad \sum_{k=1}^{\infty} y_k < \infty.$$

Natomiast jego zbieżność warunkowa pociąga

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = \infty \quad \text{oraz} \quad \sum_{k=1}^{\infty} y_k = \infty.$$

---

[1]Za ten pomysł dziękuję panu Ł. Garncarkowi.

Oto przykład pokazujący, że permutacja wyrazów szeregu *warunkowo* zbieżnego może zmienić jego sumę.

Niech

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

będzie sumą częściową warunkowo zbieżnego szeregu anharmonicznego. Przez indukcję sprawdzamy, że

$$S_{4n} + \frac{1}{2}S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}.$$

Niech

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots$$

będzie szeregiem, który jest permutacją szeregu anharmonicznego. Permutacja polega na tym, że po dwóch kolejnych wyrazach nieparzystych następuje jeden kolejny parzysty. Niech U_n będzie sumą częściową tego szeregu. Widać, że

$$U_{3n} = S_{4n} + \frac{1}{2}S_{2n},$$

więc

$$\lim_{n\to\infty} U_{3n} = \frac{3}{2}\log 2.$$

Zauważamy także, że

$$U_{3n+1} - U_{3n} \to 0, \qquad U_{3n+2} - U_{3n} \to 0,$$

więc szereg ten jest zbieżny, a jego suma wynosi $\frac{3}{2}\log 2$.

Permutacja wyrazów szeregu warunkowo zbieżnego może także zniweczyć jego zbieżność.

Niech $\{n_k\}$ będzie ciągiem liczb naturalnych dobranym tak, aby $n_0 = 1$ oraz

$$\sum_{j=n_k}^{n_{k+1}-1} \frac{1}{2j+1} > 1.$$

Rozważmy następującą permutację wyrazów szeregu anharmonicznego: Najpierw następuje n_1 kolejnych wyrazów nieparzystych, po nich pierwszy wyraz parzysty; potem znów n_2 wyrazów nieparzystych, drugi parzysty itd. Niech S_n będzie sumą częściową tej permutacji szeregu anharmonicznego. Jak widać

$$S_{n_k+1} > \frac{k}{2},$$

więc nowy szereg jest rozbieżny.

Okazuje się, że przez odpowiednią permutację wyrazów szeregu warunkowo zbieżnego można uzyskać „wszystko"– rozbieżność lub zbieżność do z góry wybranej sumy. Mówi o tym następujące twierdzenie, którego dowód poprzedzimy następującym lematem *o dwóch szeregach rozbieżnych.*

5.36. Lemat. *Niech będą dane dwa rozbieżne szeregi o sumach częściowych*

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} x_k, \qquad Y_n = \sum_{k=1}^{n} y_k$$

i wyrazach nieujemnych. Dla każdego $a > 0$ istnieją wówczas ściśle rosnące ciągi indeksów $(p_j)_{j=0}^{\infty}$ i $(q_j)_{j=0}^{\infty}$, takie że dla każdego $j \in \boldsymbol{N}$

$$(5.37) \qquad a < X_{p_j} - Y_{q_{j-1}} \leqslant a + x_{p_j}, \qquad \text{oraz} \qquad a - y_{q_j} \leqslant X_{p_j} - Y_{q_j} < a.$$

gdzie $Y_0 = 0$ i $q_0 = 0$.

Dowód. Niech $p_0 = q_0 = 0$. Przypuśćmy, że już zdefiniowaliśmy p_j i q_j. Definiujemy p_{j+1} jako najmniejszy indeks, taki że $X_{p_{j+1}} > Y_{q_j} + a$, a następnie q_{j+1} jako najmniejszy indeks, taki że $Y_{q_{j+1}} > X_{p_{j+1}} - a$. Nietrudno się przekonać, że nasze nierówności są spełnione. □

5.38. Twierdzenie (Riemann). *Niech $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ będzie szeregiem warunkowo zbieżnym. Dla każdego $a \in \boldsymbol{R}$ istnieje permutacja wyrazów szeregu σ, taka że sumy częściowe*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)}$$

są zbieżne do a. Można też dobrać σ tak, by ciąg sum częściowych był rozbieżny do $\pm\infty$ lub też nie miał nawet granicy niewłaściwej.

Dowód. Aby nie komplikować niepotrzebnie dowodu, przyjmiemy, że $a > 0$. Przypadki $a \leqslant 0$ oraz $a = \pm\infty$ są bardzo podobne i pozostawiamy je Czytelnikowi.

Niech x_j oznaczają kolejne wyrazy nieujemne szeregu $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, a y_j liczby przeciwne do jego kolejnych wyrazów ujemnych. Szereg jest zbieżny warunkowo, więc

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = \infty, \qquad \text{oraz} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} y_k = \infty.$$

W takim razie nasze szeregi sełniają założenia lematu. Niech więc (p_j) i (q_j) będą ciagami indeksów, takimi że sumy X_n i Y_n spełniają (5.37). Ponieważ nasz szereg jest zbieżny, $x_k \to 0$ i $y_k \to 0$, a więc także

$$\lim_{j\to\infty} (X_{p_j} - Y_{q_{j-1}}) = \lim_{j\to\infty} (X_{p_j} - Y_{q_j}) = a$$

na mocy lematu o trzech ciągach.

Pokażemy, że suma szeregu o wyrazach

$$x_1, x_2, \ldots, x_{p_1}, -y_1, -y_2, \ldots, -y_{q_1}, x_{p_1+1}, x_{p_1+2}, \ldots, x_{p_2}, -y_{q_1+1}, -y_{q_1+2}, \ldots, -y_{q_2}, \ldots$$

wynosi dokładnie a. Zauważmy najpierw, że każda suma częściowa tego nowego szeregu, którego wyrazy otrzymaliśmy przez pewną permutację wyrazów szeregu wyjściowego, spełnia

$$X_{p_j} - Y_{q_j} \leqslant S_n < X_{p_{j+1}} - Y_{q_j},$$

jeśli $p_j + q_j < n \leqslant p_{j+1} + q_j$ lub

$$X_{p_j} - Y_{q_{j-1}} < S_n \leqslant X_{p_j} - Y_{q_j}.$$

jeśli $p_j + q_{j-1} < n \leqslant p_j + q_j$. W takim razie

$$\lim_{n\to\infty} S_n = a$$

na mocy lematu o trzech ciągach. □

Potraktujmy twierdzenie Riemanna jako przestrogę, że z szeregami warunkowo zbieżnymi należy się obchodzić bardzo ostrożnie!

Zupełnie inaczej ma się sprawa z szeregami bezwzględnie zbieżnymi.

5.39. Twierdzenie. *Niech* $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k| < \infty$. *Wówczas dla każdej permutacji*

$$\sigma : \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}$$

szereg $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}$ *jest również zbieżny i*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty.$$

Dowód. Niech

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)}$$

i niech

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = A = \lim_{n\to\infty} A_n.$$

Niech

$$M_n = \max_{1\leqslant k\leqslant n} \sigma^{-1}(k).$$

Wtedy

$$\{1,2,\ldots,n\} \subset \sigma\Big(\{1,2,\ldots M_n\}\Big).$$

Dla $\varepsilon > 0$ niech N będzie takie, by

$$|A - A_N| \leqslant \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| < \varepsilon.$$

Wtedy dla $m \geqslant M = M_N$

$$|S_m - A_N| \leqslant \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| < \varepsilon,$$

więc

$$|S_m - A| \leqslant |S_m - A_N| + |A_N - A| \leqslant 2\sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| < 2\varepsilon,$$

co dowodzi naszej tezy. □

5.40. Wniosek. *Przy założeniach i oznaczeniach Twierdzenia 5.39 mamy*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{\sigma(k)}| < \infty.$$

Dowód. Wystarczy zastosować Twierdzenie 5.39 do szeregu wartości bezwzględnych, by otrzymać żądaną zbieżność. □

I jeszcze jedno ważne spostrzeżenie.

5.41. *Niech będzie dany ciąg* (a_n). *Jeżeli dla każdego ciągu* $\varepsilon_n \in \{0,1\}$ *szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n$ *jest zbieżny, to* $\sum_{k=1}^{\infty} |a_n| < \infty$.

Dowód. Niech $\varepsilon_n = 1$ dla $a_n \geqslant 0$ i $\varepsilon_n = 0$ dla $a_n < 0$. Wtedy, używając notacji (5.35), mamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n = \sum_{k=1}^{\infty} x_k = C_1 < \infty,$$

oraz
$$\sum_{n=1}^{\infty}(\varepsilon_n - 1)a_n = \sum_{k=1}^{\infty} y_k = C_2 < \infty,$$
a stąd
$$\sum_{n=1}^{N}|a_n| = \sum_{k=1}^{m_n} x_k + \sum_{k=1}^{n-m_n} y_k \leqslant C_1 + C_2$$
dla każdego N, co oznacza, że szereg jest zbieżny bezwzględnie. $\square$

Zadania

1. Stosując kryterium porównawcze, zbadaj zbieżność następujących szeregów:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{2^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{1+n^2}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+4)}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} 4^{-n},$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-1}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{\sqrt[4]{n^5}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n^2}{1+n^3}\right)^2.$$

2. Stosując kryterium d'Alemberta, udowodnij zbieżność szeregów:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{tg}\frac{\pi}{2^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin\frac{\pi}{2^n},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n n!}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{e^{n^2}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{100^n}{n!}.$$

3. Stosując kryterium Cauchy'ego, udowodnij zbieżność szeregów:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log^n n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arsh}^n \frac{1}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\frac{n+1}{n})^{n^2}}{3^n}.$$

4. Niech będą dane dwa ciągi $a_n > 0$ i $b_n > 0$, takie że $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0$. Pokaż, że szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ są równocześnie zbieżne lub rozbieżne. Pokaż tym sposobem, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}$ jest rozbieżny.

5. Zbadaj zbieżność szeregów: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+1/n)}{\log(n+1)}$ i $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+1/n)}{\log^2(n+1)}$.

6. Pokaż, że szereg $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^{1+\epsilon} n}$ jest zbieżny dla każdego $\epsilon > 0$.

7. Dla jakich $x > 0$ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\log x}$ jest zbieżny?

8. Zbadaj zbieżność szeregu $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n!}$.

9. Niech $\gamma_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n$. Czy szereg $\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_n^n$ jest zbieżny? A szereg $\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_n$?

10. Zbadaj zbieżność szeregów

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}.$$

11. Niech $a \in \boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{Z}$. Udowodnij, że szereg $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{a}{n}$ jest zbieżny bezwzględnie dla $a > 0$, zbieżny warunkowo dla $-1 < a \leqslant 0$ i rozbieżny dla $a \leqslant -1$.

12. Dana są szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ o wyrazach dodatnich, których wyrazy spełniają warunek

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

Udowodnij, ze zbieżność drugiego szeregu implikuje zbieżność pierwszego, a rozbieżność pierwszego – rozbieżność drugiego.

13. Wyrazy ciągu $\{a_n\}$ są dodatnie i spełniają warunek

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{\alpha}, \qquad \alpha > 1.$$

Udowodnij, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

14. Niech $a_n \geqslant 0$. Udowodnij, że jeśli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$, a ciąg $\{d_n\}$ jest ograniczony, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} d_n a_n$ jest zbieżny.

15. Udowodnij, że dla $|q| < 1$ jest $\sum_{k=1}^{\infty} kq^k = \frac{q}{(1-q)^2}$.

16. Pokaż, że dla każdego $n \in \boldsymbol{N}$ zachodzi $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} < \frac{1}{n \cdot n!}$.

17. Udowodnij, że

$$e(e^{1/e} - 1) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} < e^{1/e}.$$

18. Udowodnij, że

$$\frac{5}{4} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} < \frac{7}{5}, \qquad \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^k} < \frac{1}{n(n+1)^n}.$$

19. Zbadaj zbieżność szeregów $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log^2 n!}$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\log(2^n)!}$.

20. Niech $a_0 = e$ i $a_{n+1} = \sin a_n$. Udowodnij, że a) szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ jest zbieżny; b) szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$ jest zbieżny.

21. W szeregu harmonicznym stawiamy znak minus przy wyrazach o numerach postaci $n = 2^k$, a pozostałe wyrazy pozostawiamy bez zmian. Wykaż, że tak otrzymany szereg jest rozbieżny.

22. Oblicz sumę szeregu $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k 2^{-k}$.

23. Szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ są zbieżne bezwzględnie. Pokaż, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, gdzie $c_n = \sqrt{|a_n b_n|}$ jest zbieżny.

24. Udowodnij, że dla każdego $x \in \boldsymbol{R}$ zachodzi równość

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

25. Wiadomo, że $\lim_{n\to\infty} n^2 a_n = c \neq 0$. Pokaż, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

26. Wiadomo, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n$ jest zbieżny. Pokaż, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny bezwzględnie.

27. Podaj przykład zbieżnego szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, takiego że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ jest rozbieżny.

28. Niech $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ będzie ciągiem zbieżnym do a, szereg zaś $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ niech będzie bezwzględnie zbieżny. Niech $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. Pokaż, że $\lim_{n\to\infty} c_n = a \sum_{k=0}^{\infty} b_k$.

29. Dane są dwa zbieżne szeregi $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ i $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ o dodatnich wyrazach. Niech $\alpha_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k, \beta_n = \sum_{k=n}^{\infty} b_k$. Pokaż, że jeśli $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = p$, to również $\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = p$.

30. Pokaż, że jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o nieujemnych wyrazach jest rozbieżny, to i szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ jest rozbieżny.

31. Ciąg $\{a_n\}$ ma następującą własność: Dla każdego ciągu liczb $s_n \in \{-1, 1\}$ szereg $\sum_{n=1} s_n a_n$ jest zbieżny. Pokaż, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest bezwzględnie zbieżny.

32. Ciąg $\{a_n\}$ ma następującą własność: Dla każdego ciągu liczb $s_n \in \{0, 1\}$ szereg $\sum_{n=1} s_n a_n$ jest zbieżny. Pokaż, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest bezwzględnie zbieżny.

33. Pokaż, że
$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-\log n} < \infty, \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-\log n} = \infty, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{-\log\log n}}{n} < \infty, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-\log\log n}}{n} = \infty.$$

34. Udowodnij nierówność $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \frac{1}{n}$ dla $n \in \boldsymbol{N}$.

35. Zbadaj zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_1\gamma_2 \dots \gamma_n$, gdzie $\gamma_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n$.

36. Pewien matematyk powiedział: *Nietaktem jest dowodzić zbieżności szeregu geometrycznego za pomocą kryterium d'Alemberta.* Co mógł mieć na myśli?

37. Inny matematyk z kolei uważał, że nietaktem jest dowodzić rozbieżności szeregu harmonicznego za pomocą kryterium Raabego. Co on miał na myśli?

38. Pokaż, że ciągi
$$A_n = \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k}, \qquad B_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k}$$
są rosnące.

39. Znajdź granicę ciągu $a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}$, gdy $-1 \neq a_1 \leqslant 0$.

40. Pokaż, że każdy ciąg o wahaniu ograniczonym jest ciągiem Cauchy'ego oraz że każdy ciąg Cauchy'ego zawiera podciąg o wahaniu ograniczonym.

41. Wiadomo, że $a_n \nearrow a$. Pokaż, że wtedy
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots a_n^n} = a.$$

42. Udowodnij, że $1/4 < \gamma < 2(1 - \log 2)$.

43. Wiadomo, że szereg o wyrazach dodatnich $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$ jest zbieżny. Pokaż, że również szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{\sqrt[n]{\beta_n}}$ jest zbieżny. [Niech $\alpha_n = \beta_n^{1-1/n}$ i niech $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$. Pokaż, że wtedy $\sum_{\alpha_n^{1/n} > 1/2} \beta_n = \infty$.]

44. Niech $\boldsymbol{N}_0$ oznacza zbiór tych liczb naturalnych, w których zapisie dziesiętnym nie występuje cyfra 0. Pokaż, że $\sum_{n\in \boldsymbol{N}_0} \frac{1}{n} < 29$.

45. Niech będzie dany ciąg o wyrazach $a_n > 0$. Udowodnij, że jeśli
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant 1 - \frac{1+\alpha}{n}, \qquad \alpha \in \boldsymbol{R},$$
to
$$a_n \leqslant \frac{C}{n^{1+\alpha}}.$$
Jeśli natomiast
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1 - \frac{1+\alpha}{n}, \qquad \alpha \in \boldsymbol{R},$$
to
$$a_n \geqslant \frac{c}{n^{1+\alpha}}.$$

46. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, a ciąg $\{b_n\}$ ma wahanie ograniczone. Pokaż, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ jest zbieżny.

47. Wykaż, że jeśli $a_n > 0$ i $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, to $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Korzystając z tego, pokaż, że podane ciągi są zbieżne do zera:
$$\frac{n!}{n^n}, \qquad \frac{2^n}{n!}, \qquad \frac{n^n}{(2n)!}, \qquad \frac{(n!)^n}{n^{n^2}}, \qquad \frac{n^n}{(n!)^2}, \qquad \frac{(2n)!}{2^{n!}}.$$
Zrób jeszcze raz to samo, korzystając z bezpośrednich oszacowań na $n!$.

48. Zbadaj zbieżność szeregów

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\binom{1/2}{n}\right|q^n, (q>0) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\binom{1/2}{n}^2, \qquad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\log\frac{n+1}{n-1}}{\sqrt{n}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}.$$

49. Udowodnij, że

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}}{n\log^2 n}<\infty.$$

50. Udowodnij, że $\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$, a następnie pokaż, że $\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin\frac{1}{n}=\infty$.

51. Pokaż, że dla każdego $a>0$ i każdego $n\in\boldsymbol{N}$ spełniona jest nierówność $e^a<(1+\frac{a}{n})^{n+a}$. W tym celu udowodnij, że ciąg po prawej jest malejący.

52. Niech będą dane dwa ciągi $a_n>0$ i $b_n>0$, takie że $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=c>0$. Pokaż, że szeregi $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ są równocześnie zbieżne lub rozbieżne. Pokaż tym sposobem, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$ jest rozbieżny.

53. Dla $x\in\boldsymbol{R}\setminus\{2k\pi : k\in\boldsymbol{Z}\}$ udowodnij wzór

$$\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\frac{\sin n\frac{x}{2}\sin(n+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

54. Udowodnij, że podane szeregi mają ograniczone sumy częściowe:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\cos n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\sin(2n-1), \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin^2 n.$$

55. Udowodnij, że podane szeregi są zbieżne:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{\log n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin n}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin^2 n}{\sqrt{n}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin^2 n\log(1+\frac{1}{n}).$$

56. Dane są zbieżne ciągi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$, przy czym ten drugi jest jeszcze monotoniczny. Korzystając z kryterium Abela, udowodnij, że szeregi

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)b_n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)b_n^2$$

są zbieżne.

57. Pokaż, że ciąg $g_n=\frac{\log n}{n}$ $(n\geqslant 3)$ dąży monotonicznie do zera.

58. Pokaż, że $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}<e^{1/e}$.

59. Pokaż, że ciąg $a_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ jest ściśle malejący.

60. Udowodnij, że podane szeregi są zbieżne:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\log n}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\log n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\gamma_n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}\Big(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\Big).$$

61. Udowodnij, że podane szeregi są zbieżne:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sqrt[n]{a}}{n}, \quad (a>0), \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\operatorname{arc\,tg} n}{n}.$$

62. Oblicz sumy nieskończone otrzymane w wyniku permutacji wyrazów szeregu anharmonicznego:

$$A = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \ldots,$$
$$B = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{3} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \ldots$$

63. Nich $\sigma : \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}$ będzie permutacją liczb naturalnych. Pokaż, że $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma(n)} = \infty$.

64. Oblicz sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, gdzie $c_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(n-k+1)!}$.

65. Oblicz sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 q^n$, gdzie $|q| < 1$.

66. Dla jakich $q \in \boldsymbol{R}$ szereg

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{3-q} \log^q n}$$

jest zbieżny a) absolutnie, b) warunkowo?

67. Zbadaj, dla jakich $q \in \boldsymbol{R}$ szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{n(1+q^{2n})}$$

jest zbieżny.

68. Oblicz sumy szeregów

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+4)^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{2^n} \cos\frac{1}{2^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n!\pi}{6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n!},$$

69. Oblicz sumy szeregów

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n(n+1)}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \log\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}.$$

70. Przeprowadź dyskusję zbieżności szeregu $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n n^p \log^q n$ w zależności od $p, q \in \boldsymbol{R}$.

71. Sprawdź, że

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k!} = 2e-1, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)!} = 1, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(k+1)!} = e-1.$$

72. Dany jest malejący ciąg $a_n > 0$, taki że $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$. Pokaż, że $na_n \to 0$.

73. Oblicz sumę szeregu $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)(n+1)}{n^4}$.

74. Niech (p_n) będzie ściśle rosnącym ciągiem wszystkich liczb pierwszych. Pokaż, że dla każdego $\alpha > 1$ i każdego $n \in \boldsymbol{N}$

$$\sum_{k=1}^{p_{n+1}-1} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{p_1^\alpha p_2^\alpha \ldots p_n^\alpha}{(p_1^\alpha - 1)(p_2^\alpha - 1)\ldots(p_n^\alpha - 1)} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}.$$

oraz

$$\log p_{n+1} \leqslant \frac{p_1 p_2 \ldots p_n}{(p_1-1)(p_2-1)\ldots(p_n-1)}.$$

75. Niech (p_n) będzie ściśle rosnącym ciągiem wszystkich liczb pierwszych. Pokaż, że dla każdego $n \in \boldsymbol{N}$
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p_k - 1} \geqslant \log\log p_{n+1}.$$
Wywnioskuj stąd, że
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} = \infty.$$

76. Oblicz granicę $\lim_{n\to\infty} \cos^n \frac{1}{n}$.

77. Udowodnij wzór
$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\sin(n + \frac{1}{2}x)}{2\sin\frac{x}{2}}$$
dla $x \neq m\pi$.

78. Udowodnij, że szereg
$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos n \cdot \sin\frac{1}{n}$$
jest zbieżny warunkowo.

79. Zauważ, że na mocy przekształcenia Abela (jak w dowodzie kryterium Dirichleta)
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big) B_{k+1},$$
gdzie $B_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}$, oraz że szereg po prawej jest zbieżny bezwzględnie, a po lewej tylko warunkowo.

80. Niech $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \infty$, $b_k > 0$, i niech $a_k \to a$. Pokaż, że
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} b_k a_k}{\sum_{k=1}^{n} b_k} = a.$$

81. Pokaż, że jeśli szereg $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k}$ jest zbieżny, to $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \to 0$.

82. Niech (a_n) będzie ciągiem okresowym o okresie N i takim, że $\sum_{k=1}^{N+1} a_k = 0$. Pokaż, że szereg $\sum_{k=1}^{\infty} a_k/k$ jest zbieżny.

83. Dany jest malejący ciąg (a_n) o wyrazach dodatnich. Pokaż, że jeśli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$, to $na_n \to 0$.

84. Podaj przykład ciągu x_n, takiego że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ jest zbieżny, a szereg $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^3$ rozbieżny.

85. Podaj przykład ciągu x_n, takiego że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ jest zbieżny, a szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \sin x_n$ rozbieżny.