6. Szeregi potęgowe

Szeregiem potęgowym nazywamy szereg postaci

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Przykładami takich szeregów, które już znamy, są m.in.:

1. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$, o ile $|x| < 1$;

2. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$, dla $x \in \boldsymbol{R}$;

3. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cosh x$, dla $x \in \boldsymbol{R}$;

4. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sinh x$, dla $x \in \boldsymbol{R}$;

5. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k\, x^k = \frac{x}{(1-x)^2}$, o ile $|x| < 1$.

Jeśli szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest zbieżny dla x z pewnego zbioru, to możemy określić funkcję

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n.$$

Jej dziedzina jest zawsze niepusta, gdyż dla $x = 0$ powyższy szereg jest oczywiście zbieżny. Zajmiemy się teraz dokładniejszym badaniem dziedziny takich funkcji. Wielkość

$$r = \sup\{t \geqslant 0 : \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| t^n < \infty\}$$

nazywamy *promieniem zbieżności* szeregu potęgowego $\sum_{n=0} a_n x^n$. W przypadku, gdy $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| t^n < \infty$ dla wszystkich $t > 0$, kładziemy $r = \infty$. Kolejne twierdzenie wyjaśnia, skąd taka nazwa.

6.1. *Niech liczba r będzie promieniem zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Jeśli $|x| < r$, to szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest zbieżny bezwzględnie. Jeśli zaś $|x| > r$, to szereg ten jest rozbieżny.*

Dowód. Rzeczywiście, jeśli $|x| < r$, to istnieje $t > 0$, takie że

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| t^n < \infty,$$

więc szereg jest bezwzględnie zbieżny.

Niech teraz $|x| > r$. Przypuśćmy nie wprost, że szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest zbieżny. Wtedy $a_n x^n \to 0$ i wobec tego istnieje stała $C > 0$, taka że $|a_n x^n| \leqslant C$. Jeśli $r < t < |x|$, to

$$|a_n| t^n = |a_n x^n| \cdot (t/|x|)^n \leqslant C(t/|x|)^n$$

i wobec $0 < t/|x| < 1$ szereg $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| t^n$ jest zbieżny, co przeczy definicji r.

$\square$

A oto sposób na znajdowanie wartości promienia zbieżności.

6.2. *Niech będzie dany szereg potęgowy* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *o promieniu zbieżności równym* r. *Jeśli ciąg* $\sqrt[n]{|a_n|}$ *ma granicę* ϱ *właściwą lub nie, to*

$$r = \begin{cases} 0, & \varrho = \infty, \\ 1/\varrho, & 0 < \varrho < \infty, \\ \infty, & \varrho = 0. \end{cases}$$

Dowód. Skorzystamy z kryterium Cauchy'ego. Niech najpierw $0 < \varrho < \infty$. Otóż, skoro

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|t^n} = t \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = t \cdot \varrho,$$

więc

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| t^n < \infty$$

dla $0 < t < 1/\varrho$ i

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| t^n = \infty$$

dla $t > 1/\varrho$. Dlatego $r = 1/\varrho$.

Gdy $\varrho = 0$, to $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| t^n < \infty$ dla wszystkich $t \geqslant 0$, skąd $r = \infty$. W przypadku $\rho = \infty$ szereg jest zbieżny tylko dla $t = 0$, więc $r = 0$. $\square$

A oto kilka przykładów:

6.3. Przykład. a) Dla szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$$

otrzymujemy promień zbieżności $r = 1$. Sprawdźmy jeszcze, co dzieje się dla $|x| = 1$. Otóż mamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} < \infty, \qquad x = 1,$$

oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (-1)^n = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = -\infty, \qquad x = -1.$$

Oznacza to, że szereg ten jest zbieżny dla $x \in (-1, 1]$ i rozbieżny poza tym, przy czym wewnątrz przedziału zbieżność jest bezwzględna, a w $x = 1$ warunkowa.

b) Rozważmy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n.$$

Skoro

$$1/r = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^2 = 1$$

oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{n^2} x^n\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty, \qquad , x = 1,$$

więc szereg ten jest zbieżny (i to bezwzględnie) dla $x \in [-1, 1]$ i rozbieżny poza tym.

c) Dla szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

mamy oczywiście $r = 1$ oraz rozbieżność dla $|x| = 1$.

d) Dla szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

otrzymujemy

$$\varrho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0,$$

skąd $r = \infty$, co oznacza, że szereg ten jest zbieżny (bezwzględnie) dla wszystkich $x \in \boldsymbol{R}$.

e) Dla szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n$$

mamy

$$\varrho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^n} = \lim_{n\to\infty} n = \infty,$$

więc promień zbieżności wynosi $r = 0$, czyli szereg ten jest zbieżny tylko dla $x \in \{0\}$.

f) Dla szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = 1 + x^2 + x^4 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

mamy

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{gdy } n \text{ jest parzyste,} \\ 0, & \text{gdy } n \text{ jest nieparzyste,} \end{cases}$$

czyli

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} 1, & \text{gdy } n \text{ jest parzyste} \\ 0, & \text{gdy } n \text{ jest nieparzyste,} \end{cases}$$

więc granica $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ nie istnieje

Łatwo jednak zauważyć, że nasz szereg jest zawsze szeregiem geometrycznym o ilorazie x^2, a więc zbieżnym dokładnie dla $|x| < 1$. Stąd $r = 1$.

6.4. Twierdzenie. *Jeśli* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *jest szeregiem potęgowym o dodatnim promieniu zbieżności* r*, to funkcja*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

jest ciągła w przedziale $(-r, r)$*.*

Dowód. Niech $x, y \in (-r, r)$. Istnieje taka liczba R, że $|x|, |y| < R < r$. Weźmy dowolne $\varepsilon > 0$. Mamy

$$
\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| &= \left| \sum_{n=0}^{N} a_n x^n + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{N} a_n y^n - \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n y^n \right| \\
&\leqslant \left| \sum_{n=0}^{N} a_n x^n - \sum_{n=0}^{N} a_n y^n \right| + \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n||x|^n + \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n||y|^n. \\
&\leqslant \left| \sum_{n=0}^{N} a_n x^n - \sum_{n=0}^{N} a_n y^n \right| + 2 \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| R^n.
\end{aligned}
\tag{6.5}
$$

Drugi składnik powyższej sumy jest podwojoną resztą szeregu zbieżnego, więc

$$
\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| R^n < \varepsilon,
$$

dla dostatecznie dużych N. Dla każdego N

$$
f_N(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n
$$

jest oczywiście wielomianem, a więc funkcją ciągłą. Wobec tego

$$
|f_N(x) - f_N(y)| < \varepsilon,
$$

jeśli y jest dostatecznie bliskie x. Ostatecznie

$$
|f(x) - f(y)| < 3\varepsilon,
$$

jeśli y jest dostatecznie bliskie x przy dostatecznie dużym N, co dowodzi ciągłości funkcji f w przedziale $(-r, r)$. □

A oto twierdzenie o ciągłości szeregu potęgowego na brzegu przedziału.

6.6. Twierdzenie. *Niech $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ będzie szeregiem potęgowym o promieniu zbieżności $r > 0$. Załóżmy, że szereg ten jest zbieżny dla $x = r$. Niech*

$$
f\colon (-r, r] \ni x \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.
$$

Wtedy

$$
f(r) = \lim_{x \to r-} f(x).
$$

Dowód. Weźmy $x \in (0, r)$. Mamy

$$
|f(r) - f(x)| \leqslant \left| \sum_{n=0}^{N} a_n r^n - \sum_{n=0}^{N} a_n x^n \right| + \Big| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n r^n \Big| + \Big| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x^n \Big|
\tag{6.7}
$$

Pierwsze dwa składniki można oszacować jak wyżej. Rzeczywiście drugi przedstawia resztę szeregu z założenia zbieżnego, a pierwszy różnicę wartości wielomianu. Istota sprawy leży w sposobie oszacowania ostatniego składnika. Mamy

$$
\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n r^n \left(\frac{x}{r} \right)^n,
$$

gdzie $a_n r^n$ jest wyrazem szeregu (znów z założenia) zbieżnego, a $(\frac{x}{r})^n$ wyrazem ciągu monotonicznie zbieżnego do zera. Na mocy nierówności Abela

$$|\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x_n| \leqslant \beta_N \left(\frac{x}{r}\right)^{N+1} \leqslant \beta_N,$$

gdzie

$$\beta_N = \sup_{m>N} |\sum_{n=N}^{m} a_n r^n| \to 0,$$

gdy $N \to \infty$. To pokazuje, że i trzeci wyraz można uznać za mały przy dostatecznie dużych N. □

6.8. Przykład. Rozważmy wielomian stopnia nie większego niż N

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n.$$

Wtedy

$$\begin{aligned} f(x+h) &= \sum_{n=0}^{N} a_n (x+h)^n = \sum_{n=0}^{N} a_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^k \\ &= \sum_{k=0}^{N} h^k \sum_{n=k}^{N} \binom{n}{k} a_n x^{n-k} = \sum_{k=0}^{N} h^k \sum_{n=k}^{N} \binom{n}{k} a_n x^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{N} \alpha_k(x)\, h^k, \end{aligned} \tag{6.9}$$

gdzie

$$\alpha_k(x) = \sum_{n=k}^{N} \binom{n}{k} a_n x^{n-k}.$$

Aby rozwinąć w podobny sposób funkcję zadaną szeregiem potęgowym, musimy najpierw rozważyć zagadnienie sumowania szeregów iterowanych.

Niech będzie dany ciąg $\{\alpha_{n,k}\}_{n,k=0}^{\infty}$ liczb rzeczywistych. Przez zbieżność *szeregu iterowanego*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{n,k} \tag{6.10}$$

będziemy rozumieć zbieżność szeregów

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} A_n, \qquad A_n = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{n,k}.$$

W takim razie suma szeregu iterowanego wyraża się granicą iterowaną

$$A = \lim_{N\to\infty} \lim_{K\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \sum_{k=0}^{K} a_{n,k}.$$

Jeśli $\alpha_{n,k} \geqslant 0$, to nietrudno zauważyć, że zbieżność szeregu (6.10) jest równoważna istnieniu stałej $C > 0$, takiej że

$$\sum_{n=0}^{N} \sum_{k=0}^{K} \alpha_{n,k} \leqslant C \tag{6.11}$$

dla każdych $N, K \in \boldsymbol{N}$. Dlatego też fakt zbieżności szeregu iterowanego o wyrazach nieujemnych będziemy oznaczać krótko przez

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{n,k} < \infty.$$

W przeciwnym wypadku będziemy pisać

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{n,k} = \infty.$$

Warunek (6.11) pociąga równoważność

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{n,k} < \infty \iff \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_{n,k} < \infty$$

dla $\alpha_{n,k} \geqslant 0$.

6.12. *Niech $\alpha_{n,k} \in \boldsymbol{R}$. Jeśli*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}|\alpha_{n,k}| < \infty,$$

to oba szeregi iterowane

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{n,k}, \qquad \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_{n,k}$$

są zbieżne.

Dowód. Wystarczy dwukrotnie skorzystać z tego, że zbieżność absolutna pociąga zbieżność i z powyższych uwag o zmianie porządku sumowania dla szeregów o wyrazach nieujemnych. □

6.13. Przykład. Niech będzie $0 < q < 1$ i niech

$$a_{n,k} = (-1)^{k+1}q^{[k/2]+1}(1-q^{[k/2]+1})^{n-1}.$$

Zauważmy, że $|a_{n,k}| \to 0$, gdy $k \to \infty$ oraz $a_{k+1} = -a_k$ dla k parzystych, więc

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a_{n,k} = \sum_{n=1}^{\infty}a_{n,1} = 1.$$

Z drugiej jednak strony

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_{n,k} = (-1)^{k+1}q^{[k/2]+1}\sum_{n=0}^{\infty}(1-q^{[k/2]+1})^{n} = (-1)^{k+1},$$

a więc suma iterowana $\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}a_{n,k}$ nie istnieje.

6.14. Lemat. *Jeśli*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}|\alpha_{n,k}| < \infty.$$

to oba szeregi iterowane o wyrazie ogólnym $\alpha_{n,k}$ są zbieżne do tej samej sumy.

Dowód. Zbieżność obu szeregów wynika z wcześniejszych uwag. Niech

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{n,k}=A,\qquad \lim_{K\to\infty}\sum_{k=0}^{K}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_{n,k}=B.$$

Wtedy dla dowolnego $\varepsilon>0$

$$\Big|\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{n,k}-\sum_{k=0}^{K}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_{n,k}\Big|=\Big|\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=K+1}^{\infty}\alpha_{n,k}-\sum_{k=0}^{K}\sum_{n=N+1}^{\infty}\alpha_{n,k}\Big|$$
$$\leqslant\sum_{k=N+1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}|\alpha_{n,k}|+\sum_{n=N+1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}|\alpha_{n,k}|<2\varepsilon$$

dla dostatecznie dużych $N,K\in\boldsymbol{N}$, co oznacza, że $A=B$. □

Powracamy do szeegów potęgowych.

6.15. Twierdzenie. *Niech będzie dany szereg potęgowy $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ o dodatnim promieniu zbieżności r. Wtedy dla każdego ustalonego $|x_0|<r$ i dla $|h|<r-|x_0|$ funkcja f rozwija się w szereg potęgowy (wokół punktu x_0) według wzoru*

$$f(x_0+h)=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k(x_0)\,h^k, \tag{6.16}$$

gdzie

$$\alpha_k(x_0)=\sum_{n=k}^{\infty}\binom{n}{k}a_nx_0^{n-k}.$$

Dowód. Mamy

$$\begin{aligned}f(x_0+h)&=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x_0+h)^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x_0^{n-k}h^k\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_nx_0^{n-k}h^k.\end{aligned}\tag{6.17}$$

Skoro

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}|a_n||x_0|^{n-k}|h|^k=\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|\big(|x_0|+|h|\big)^n<\infty,$$

bo $|x_0|+|h|<r$, więc szereg iterowany jest bezwzględnie zbieżny. Możemy zatem zamienić kolejność sumowania, otrzymując

$$\begin{aligned}f(x_0+h)&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_nx_0^{n-k}h^k=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty}\binom{n}{k}a_nx_0^{n-k}h^k\\&=\sum_{k=0}^{\infty}h^k\sum_{n=k}^{\infty}\binom{n}{k}a_n\,x_0^{n-k}=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k(x_0)\,h^k.\end{aligned}\tag{6.18}$$

co kończy dowód. □

Wzór (6.16) przedstawia funkcję f w postaci *rozwinięcia w szereg potęgowy* wokół punktu x_0. Zauważmy, że inną postacią tego samego wzoru jest

$$f(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k(x_0)\,(t-x_0)^k,\qquad |t-x_0|<r-|x_0|.$$

Do szeregów potęgowych powrócimy, gdy mowa będzie o różniczkowaniu i zbieżności szeregów funkcyjnych.

Zadania

1. Sprawdź, że dla $|x| < 1$

$$\lim_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\dots(1+x^{2^n}) = \frac{1}{1-x}.$$

2. Funkcję $(1-x)^{-1}$ rozwiń w szereg potęgowy w punktach $a = 1/2$ i $b = 2$.

3. Przedstaw funkcje $f(x) = e^{-x^2}$, $g(x) = e^{2x}$ i $h(x) = \frac{e^x-1}{x}$ dla $x \neq 0$ i $h(0) = 1$ w postaci szeregów potęgowych.

4. Przedstaw w postaci szeregu potęgowego funkcje $x \mapsto \frac{1}{(1-x)^2}$ i $x \mapsto \frac{1+x}{(1-x)^2}$ dla $|x| < 1$.

5. Znajdź promień zbieżności szeregów potęgowych:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}x^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty}10^n x^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{10^n n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^n}{n!}x^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty}\log^4 n x^n.$$

6. Wiadomo, że szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ma promień zbieżności r. Wykaż, że promień zbieżności każdego z szeregów

$$\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty}(n^2+1)a_n x^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+3}x^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} n^4 a_n x^n$$

także wynosi r. Przy założeniu $0 < r < \infty$ określ promień zbieżności szeregów

$$\sum_{n=0}^{\infty}2^n a_n x^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty}2^{-n}a_n x^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty}n^n a_n x^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}x^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty}a_n^2 x^n.$$

7. Wiadomo, że szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ma promień zbieżności $0 < r < \infty$. Wykaż, że promień zbieżności szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{4n}$ wynosi $r^{1/4}$.

8. Wyrazy ciągu $\{a_n\}$ spełniają oszacowanie $|a_n| \leqslant Cn^4$. Pokaż, że dla każdego $|x| < 1$ szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest bezwzględnie zbieżny.

9. Oblicz promień zbieżności szeregów

$$\sum_{n=0}^{\infty}2^{n^2}x^{n!}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty}n^n x^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty}2^n x^{n^2}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n x^n}{\binom{2n}{n}}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^n x^n}{(1+1/n)^{n^2}},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2+(-1)^n)^n\frac{x^n}{n^2}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty}(1+1/n)^{(-1)^n n^2}x^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty}(1+1/n)^n x^{n^2}.$$

10. Oblicz promień zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$ dla $\alpha > 0$.

11. Funkcja f zadana jest szeregiem potęgowym $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, gdzie $a_n \geqslant 0$, o promieniu zbieżności $r = 1$. Wiadomo, że f jest ograniczona na $[0,1)$. Pokaż, że $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$, a następnie, nie korzystając z twierdzenia Abela, że

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

12. Oblicz promień zbieżności szeregów

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}\, x^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \log\big(1+\frac{1}{n}\big)\, x^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n}\, x^{2n}.$$

13. Dany szereg potęgowy jest zbieżny dla pewnego x_0. Pokaż, że jest on zbieżny bezwzględnie dla każdego $|x| < |x_0|$.

14. Oblicz sumy szeregów $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)x^n$ dla $|x| < 1$.

15. Wiadomo, że $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} |a_{nm}| < \infty$. Pokaż, że

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{nm} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{N} a_{nm}.$$