7. Różniczkowanie

Niech będzie dana funkcja f określona w pewnym otoczeniu punktu $x_0 \in \boldsymbol{R}$. Mówimy, że f *jest różniczkowalna* w x_0 (ma w x_0 pochodną), jeśli iloraz różnicowy

$$x \to \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

ma w punkcie x_0 granicę. Oznaczamy ją przez $f'(x_0)$ i nazywamy *pochodną funkcji f w punkcie x_0*. Zatem z definicji

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Równoważnie, oznaczając $h = x - x_0$, mamy

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Czasem też oznacza się pochodną inaczej:

$$f'(x_0) = \frac{df(x)}{dx}\bigg|_{x=x_0}.$$

Pierwsze oznaczenie pochodzi od Lagrange'a, a drugie od Leibniza.

Wiemy już, że

$$\frac{d}{dx}a^x\bigg|_{x=x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{a^x - a^{x_0}}{x - x_0} = a^{x_0} \log a$$

dla $a > 0$ i $x_0 \in \boldsymbol{R}$ oraz

$$\frac{d}{dx}x^\alpha\bigg|_{x=x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^\alpha - x_0^\alpha}{x - x_0} = \alpha x_0^{\alpha - 1}$$

dla $x_0 > 0$ i $\alpha \in \boldsymbol{R}$. Zatem zarówno funkcja wykładnicza o dowolnej podstawie, jak i funkcja potęgowa, są różniczkowalne w każdym punkcie swojej dziedziny. W szczególności

$$(e^x)' = e^x, \qquad (x)' = 1$$

dla każdego $x \in \boldsymbol{R}$. Łatwo również zauważyć, że funkcja stała jest wszędzie różniczkowalna, a jej pochodna jest zawsze równa 0.

7.1. Przykład. Obliczmy pochodną funkcji logarytmicznej w punkcie $x_0 > 0$. Mamy

$$\frac{\log(x_0 + h) - \log x_0}{h} = \frac{\log(1 + \frac{h}{x_0})}{h/x_0} \cdot \frac{1}{x_0}.$$

Jako że

$$\lim_{z \to 0} \frac{\log(1 + z)}{z} = 1,$$

widzimy, że

$$(\log)'(x_0) = \frac{1}{x_0}.$$

Z definicji pochodnej natychmiast wynika, że

7.2. *Funkcja $f : (a, b) \to \boldsymbol{R}$ jest różniczkowalna w punkcie $x_0 \in (a, b)$, wtedy i tylko wtedy gdy*

$$f(x) - f(x_0) = \varphi(x)(x - x_0), \qquad x \in (a, b),$$

gdzie $\varphi : (a, b) \to \boldsymbol{R}$ jest pewną funkcją ciągłą w x_0. Jeśli tak jest, to $f'(x_0) = \varphi(x_0)$.

Tę równoważność można ująć subtelniej.

7.3. *Funkcja* $f:(a,b)\to \boldsymbol{R}$ *jest różniczkowalna w* x_0*, wtedy i tylko wtedy gdy istnieją liczba* m *i funkcja* ω *określona w otoczeniu* 0*, takie że*

$$f(x_0+h)=f(x_0)+m\cdot h+\omega(h), \tag{7.4}$$

gdzie $\lim_{h\to 0}\frac{\omega(h)}{h}=0$*. Jeśli tak jest, to*

$$m=f'(x_0).$$

Dowód. Warunek (7.3) można zapisać jako

$$f(x+h)-f(x_0)=\varphi(x+h)h=\varphi(x_0)h+(\varphi(x+h)-\varphi(x_0))\,h,$$

dla dostatecznie małych h i położyć $m=\varphi(x_0)$, $\omega(h)=(\varphi(x+h)-\varphi(x_0))\,h$. Teraz już widać, że teza wynika z (7.3). □

Zauważmy, że warunek (7.4) można wyrazić tak:

$$f(x)=g(x)+\omega(x-x_0),$$

gdzie $g(x)=m(x-x_0)+f(x_0)$ jest funkcją liniową. Zatem (7.4) mówi, że f posiada *aproksymację liniową*, gdyż różnica

$$f(x)-g(x)=\omega(x-x_0)$$

dąży do 0 szybciej niż czynnik liniowy, gdy $x\to x_0$.

Będziemy mówili, że prosta ukośna

$$y=m(x-x_0)+f(x_0)$$

jest *styczna* do wykresu funkcji f określonej w otoczeniu punktu x_0, jeśli odległość punktu $P_x=(x,f(x))$ leżącego na wykresie funkcji od prostej jest mała w porównaniu z jego odległością od punktu $P_{x_0}=(x_0,f(x_0))$, gdy x dąży do x_0, czyli jeśli

$$\lim_{x\to x_0}\frac{P_xP'_x}{P_xP_{x_0}}=0,$$

gdzie P'_x jest rzutem prostopadłym P_x na prostą. Mamy

$$P_xP'_x=\frac{|f(x)-f(x_0)-m(x-x_0)|}{\sqrt{1+m^2}}$$

oraz

$$P_xP_{x_0}=\sqrt{(x-x_0)^2+(f(x)-f(x_0))^2}.$$

Zatem prosta $y=m(x-x_0)+f(x_0)$ jest styczna do wykresu funkcji f, wtedy i tylko wtedy gdy

$$\lim_{x\to x_0}\frac{|f(x)-f(x_0)-m(x-x_0)|}{\sqrt{(x-x_0)^2+(f(x)-f(x_0))^2}}=0. \tag{7.5}$$

7.6. *Prosta* $y=m(x-x_0)+f(x_0)$ *jest styczna do wykresu funkcji* f *określonej w otoczeniu punktu* x_0 *wtedy i tylko wtedy, gdy* f *jest różniczkowalna w* x_0 *i* $f'(x_0)=m$*.*

Dowód. Dzieląc licznik i mianownik w (7.5) przez $x-x_0$, widzimy, że styczność jest równoważna warunkowi

$$\lim_{x\to x_0}\frac{|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-m|}{\sqrt{1+\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)^2}}=0. \tag{7.7}$$

Przypuśćmy, że dla pewnego ciągu $x_n\to x_0$

$$\Big(\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}\Big)^2\to\infty.$$

Wtedy

$$\frac{|\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0} - m|}{\sqrt{1+\left(\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}\right)^2}} = \frac{|1 - \frac{m}{\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}}|}{\sqrt{\frac{1}{\left(\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}\right)^2}+1}} \to 1,$$

więc nie ma mowy o styczności. Widać stąd, że warunkiem równoważnym (7.64) jest

$$\lim_{x\to x_0} \left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - m\right| = 0,$$

a to jest nasza teza. □

7.8. *Jeżeli funkcja f określona w otoczeniu punktu x_0 jest różniczkowalna w x_0, to jest też ciągła w tym punkcie.*

Dowód. Dowód wynika natychmiast z istnienia aproksymacji liniowej (7.4). □

7.9. Przykład. Niech $f(x) = |x|$ i niech $x_0 = 0$. Iloraz różnicowy

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{|x|}{x}$$

nie ma granicy, gdy $x \to 0$, więc f nie jest różniczkowalna w tym punkcie. Wykres tej funkcji ma w punkcie $(0,0)$ „ostrze" i nie ma stycznej.

Mówimy, że funkcja $f : (a,b) \to \boldsymbol{R}$ ma w punkcie $x_0 \in (a,b)$ maksimum lokalne, jeśli istnieje $h > 0$, takie że $(x_0 - h, x_0 + h) \subset (a,b)$ i

$$f(x) \leqslant f(x_o), \qquad x \in (x_0 - h, x_0 + h).$$

Czytelnik łatwo domyśli się, jak definiujemy ścisłe maksimum lokalne, oraz minimum i ścisłe minimum lokalne. Maksimum i minimum lokalne należy odróżniać od największej i najmniejszej wartości funkcji na jej całej dziedzinie.

7.10. *Niech będzie dana funkcja f określona w otoczeniu x_0 i różniczkowalna w tym punkcie. Jeśli f ma ekstremum lokalne w x_0, to $f'(x_0) = 0$.*

Dowód. Przypuśćmy, że f ma w x_0 maksimum lokalne. Wtedy dla dostatecznie małych $h \neq 0$

$$f(x_0 - h) \leqslant f(x_0),$$

skąd widać, że lewostronne ilorazy różnicowe będą nieujemne, a prawostronne niedodatnie. Zatem

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = 0.$$

W przypadku minimum lokalnego rozumujemy analogicznie. □

7.11 (Arytmetyka pochodnych). *Niech f, g będą funkcjami określonymi w otoczeniu punktu x_0. Jeżeli obie są różniczkowalne w x_0 , to także funkcje $f+g$ i $f \cdot g$ są różniczkowalne w tym punkcie i*

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0), \qquad (f\cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

Jeżeli ponadto $g(x_0) \neq 0$, to funkcja f/g, która jest dobrze określona w pewnym (być może mniejszym) otoczeniu x_0, jest różniczkowalna w x_0 i

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

Dowód. Mamy

$$\frac{(f+g)(x_0+h)-(f+g)(x_0)}{h}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h},$$

skąd po przejściu do granicy otrzymujemy pierwszą część tezy. Mamy też

$$\frac{(f\cdot g)(x_0+h)-(f\cdot g)(x_0)}{h}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\cdot g(x_0+h)$$
$$+\,f(x_0)\cdot\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\cdot,$$

co pociąga drugą część tezy, czyli *wzór Leibniza.*

Trzecią część dotyczącą ilorazu udowodnimy korzystając z drugiej. Mamy

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\left(f\cdot\frac{1}{g}\right)'(x_0)=\frac{f'(x_0)}{g(x_0)}+f(x_0)\cdot\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0),$$

więc wystarczy pokazać, że

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0)=-\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2},$$

a to wynika natychmiast z tożsamości

$$\frac{1}{h}\left(\frac{1}{g}(x_0+h)-\frac{1}{g}(x_0)\right)=\frac{1}{h}\cdot\frac{g(x_0)-g(x_0+h)}{g(x_0+h)g(x_0)},$$

ciągłości g w x_0 i przejścia granicznego. □

7.12. Przykład. Niech

$$f(x)=\sum_{n=0}a_nx^n$$

będzie wielomianem. Z powyższych twierdzeń łatwo wynika, że

$$f'(x)=\sum_{n=1}na_nx^{n-1}.$$

7.13. Przykład. Rozważmy funkcję zadaną szeregiem potęgowym

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,\qquad x\in(-r,r),$$

gdzie $r>0$ jest promieniem zbieżności tego szeregu. Jak pamiętamy, dla każdego ustalonego $x\in(-r,r)$ i $|h|<r-|x|$,

$$f(x+h)-f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n(x)h^n,$$

gdzie

$$\alpha_n(x)=\sum_{k=n}^{\infty}\binom{k}{n}a_kx^{k-n}.$$

Zatem

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n(x)h^{n-1}$$

i w konsekwencji

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\alpha_1(x),$$

czyli

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Okazuje się zatem, że funkcja zadana szeregiem potęgowym jest różniczkowalna w każdym punkcie otwartego przedziału zbieżności, a jej pochodna wyraża się także szeregiem potęgowym, który, jak łatwo spostrzec, ma ten sam promień zbieżności r. Ponadto jest on zbudowany z pochodnych wyrazów szeregu. Warto zapamiętać regułę, że szereg potęgowy różniczkujemy *wyraz po wyrazie.*

O różniczkowalności funkcji f w punkcie x_0 można mówić tylko wtedy, gdy jest ona określona w pewnym otoczeniu (czyli przedziale otwartym) zawierającym ten punkt. Dlatego sformułowanie f *jest różniczkowalna w* x_0 będzie odtąd oznaczać, że f jest określona w otoczeniu x_0 i różniczkowalna w x_0.

7.14. Twierdzenie. *Niech g będzie funkcją różniczkowalną w x_0, a f różniczkowalną w $y_0 = g(x_0)$. Wtedy funkcja $F = f \circ g$ jest różniczkowalna w x_0 i $F'(x_0) = f'(y_0)g'(x_0)$. Innymi słowy,*

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0).$$

Dowód. Na mocy[1] (7.3) istnieje funkcja φ ciągła w x_0 i funkcja ψ ciągła w y_0, taka że

$$g(x) - g(x_0) = \varphi(x)(x - x_0), \qquad f(y) - f(y_0) = \psi(y)(y - y_0),$$

a ponadto

$$\varphi(x_0) = g'(x_0), \qquad \psi(y_)) = f'(y_0),$$

wobec czego

$$\begin{aligned} F(x) - F(x_0) &= f(g(x)) - f(g(x_0)) = \\ &= \psi(g(x))(g(x) - g(x_0)) = (\psi \circ g)(x)\varphi(x)(x - x_0), \end{aligned}$$

gdzie funkcja $\chi(x) = (\varphi \circ g)(x)\varphi(x)$ jest ciągła w x_0. Zatem znowu na mocy (7.3), $f \circ g$ jest różniczkowalna w x_0, a jej pochodna jest równa

$$(f \circ g)'(x_0) = \chi(x_0) = \psi(g(x_0))\varphi(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0).$$

□

7.15. Przykład. Niech $F(x) = x^x$ dla $x > 0$. Mamy

$$F(x) = e^{x \log x} = f(g(x)),$$

gdzie $g(x) = x \log x$ i $f(y) = e^y$. Stąd

$$(x^x)' = f'(x \log x)(x \log x)' = e^{x \log x}(\log x + 1) = x^x(\log x + 1).$$

7.16. Twierdzenie. *Niech funkcja $f : (a, b) \to (c, d)$ będzie wzajemnie jednoznaczna i ma w punkcie $x_0 \in (a, b)$ niezerową pochodną, a funkcja odwrotna $g : (c, d) \to (a, b)$ niech będzie ciągła w $y_0 = f(x_0)$. Wtedy g jest różniczkowalna w y_0 i $g'(y_0) = 1/f'(x_0)$. Innymi słowy,*

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}, \quad \text{lub} \quad (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

[1]Na ten prosty dowód zwrócił moją uwagę pan Remigiusz Suwalski.

Dowód. Mamy

$$\lim_{y\to y_0}\frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0}=\lim_{y\to y_0}\frac{g(y)-g(y_0)}{f(g(y))-f(g(y_0))}$$
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}=\frac{1}{f'(x_0)},$$

co dowodzi naszej tezy, pod warunkiem, że $y\to y_0$ pociąga $x\to x_0$. To jednak wynika z założonej ciągłości g w tym punkcie. □

Jeżeli funkcja $f:(a,b)\to \boldsymbol{R}$ jest różniczkowalna w każdym punkcie $x\in(a,b)$, to mówimy, że jest *różniczkowalna w przedziale* (a,b). W ten sposób pojawia się nowa funkcja

$$(a,b)\ni x\mapsto f'(x)\in \boldsymbol{R},$$

zwana *funkcją pochodną*.

7.17. Twierdzenie. *Funkcja pochodna na odcinku otwartym I ma własność Darboux.*

Dowód. Niech

$$f'(a)<A<f'(b)$$

dla pewnych $a<b$ z odcinka I. Należy pokazać, że istnieje punkt $a<c<b$, taki że $f'(c)=A$.

Przypuśćmy na razie, że $A=0$. Skoro $f'(a)<0$ i $f'(b)>0$, to dla pewnych $a<a_1<b_1<b$ jest

$$f(a_1)<f(a),\qquad f(b_1)<f(b),$$

a więc w żadnym z punktów a,b funkcja ciągła f nie przyjmuje swojej najmniejszej wartości na odcinku $[a,b]$. Istnieje więc $c\in(a,b)$, w którym ta najmniejsza wartość jest przyjęta i tam też $f'(c)=0$.

Jeśli teraz A jest dowolne, stosujemy powyższe rozumowanie do funkcji

$$g(x)=f(x)-Ax,$$

która spełnia

$$g'(a)<0<g'(b).$$

Mamy więc $g'(c)=0$ dla pewnego $a<c<b$, a stąd $f'(c)=A$. □

7.18. Twierdzenie (Rolle). *Niech $f:[a,b]\to \boldsymbol{R}$, gdzie $a<b$, będzie funkcją ciągłą i różniczkowalną w (a,b). Jeżeli ponadto $f(a)=f(b)$, to istnieje $c\in(a,b)$, takie że $f'(c)=0$.*

Dowód. Funkcja f jako ciągła na przedziale domkniętym przyjmuje największą i największą wartość. Jeśli obie są przyjęte na końcach przedziału, to wobec $f(a)=f(b)$ funkcja jest stała i nasza teza jest oczywista. W przeciwnym wypadku f ma ekstremum lokalne (i globalne) w $c\in(a,b)$ i w tym punkcie musi być $f'(c)=0$. □

7.19. Twierdzenie (Lagrange). *Niech $f:[a,b]\to \boldsymbol{R}$, gdzie $a<b$, będzie funkcją ciągłą i różniczkowalną w (a,b). Wtedy istnieje $c\in(a,b)$, takie że*

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Dowód. Niech

$$g(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a),\qquad x\in[a,b].$$

Jak łatwo zauważyć, funkcja $F=f-g$ spełnia założenia twierdzenia Rolle'a, więc $F'(c)=0$ dla pewnego $c\in(a,b)$, a stąd

$$f'(c)=g'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

□

Z twierdzenia Lagrange'a łatwo otrzymać następujące trzy wnioski.

7.20. Wniosek. *Jeśli $f : (a,b) \to \boldsymbol{R}$ jest różniczkowalna i $f'(x) = 0$ dla $x \in (a,b)$, to f jest funkcją stałą.*

7.21. Wniosek. *Funkcja f różniczkowalna w przedziale (a,b) jest rosnąca (malejąca) wtedy i tylko wtedy, gdy jej pochodna w tym przedziale jest nieujemna (niedodatnia).*

7.22. Wniosek. *Jeżeli funkcja f określona w przedziale (a,b) ma dodatnią (ujemną) pochodną w tym przedziale, to jest ściśle rosnąca (malejąca).*

Mówimy, że funkcja $g : (a,b) \to \boldsymbol{R}$ *zmienia znak* z ujemnego na dodatni w punkcie $c \in (a,b)$, jeśli istnieje $h > 0$, takie że $(c-h, c+h) \subset (a,b)$ oraz

$$g(x) \begin{cases} < 0, & c-h < x < c, \\ = 0, & x = c, \\ > 0, & c < x < x+h. \end{cases}$$

Analogicznie definiujemy zmianę znaku z dodatniego na ujemny.

A oto kolejny wniosek z twierdzenia Lagrange'a.

7.23. Wniosek. *Niech f będzie różniczkowalna w (a,b). Jeśli pochodna f' zmienia w punkcie x_0 znak z ujemnego na dodatni (z dodatniego na ujemny), to f ma w x_0 ścisłe minimum (maksimum) lokalne.*

Dowód. Przypuśćmy, że pochodna zmienia znak w x_0 z ujemnego na dodatni. Wtedy dla x dostatecznie bliskich x_0

$$f(x) - f(x_0) = f'(c(x))(x - x_0) > 0,$$

gdzie $c(x)$ leży w odcinku otwartym $\Big(\min\{x, x_0\}, \max\{x, x_0\}\Big)$, więc x_0 jest punktem ścisłego minimum. Podobnie rozumujemy w przypadku, gdy pochodna zmienia znak z dodatniego na ujemny. $\square$

Niech będzie dana funkcja $f : (a,b) \to \boldsymbol{R}$. Funkcję różniczkowalną $F : (a,b) \to \boldsymbol{R}$, taką że $F'(x) = f(x)$ dla $x \in (a,b)$ nazywamy *funkcją pierwotną* funkcji f. Oczywiście, jeśli F jest pierwotną f, to i $F_c(x) = F(x) + c$ jest pierwotną f, więc funkcja pierwotna (o ile istnieje) nie jest wyznaczona jednoznacznie. Tym niemniej, dwie różne funkcje pierwotne na odcinku mogą się różnić tylko o stałą. Rzeczywiście, jeśli

$$F_1'(x) = f(x) = F_2'(x), \qquad x \in (a,b),$$

to $(F_1 - F_2)'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = 0$, więc na mocy Wniosku 7.20, funkcja $F_1 - F_2$ jest stała.

7.24. Lemat. *Funkcja f zadana szeregiem potęgowym*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad x \in (-r, r),$$

gdzie $r > 0$ jest promieniem zbieżności tego szeregu, ma zawsze funkcję pierwotną. Wyraża się ona szeregiem potęgowym

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

o tym samym promieniu zbieżności.

Dowód. Najpierw sprawdzamy, że promień zbieżności nowego szeregu jest także równy r, a potem różniczkując wyraz po wyrazie przekonujemy się, że $F' = f$. $\square$

Nie każda jednak funkcja ma pierwotną. Wystarczy przypomnieć sobie, że funkcja pochodna ma zawsze własność Darboux (por. Twierdzenie 7.17). Zatem funkcja nie mająca tej własności, a w szczególności funkcja mająca nieciągłości pierwszego rodzaju, nie może mieć pierwotnej. Później zobaczymy jednak, że każda funkcja *ciągła* ma pierwotną.

7.25. Przykład. Korzystając z lematu rozwiniemy funkcję logarytmiczną w szereg potęgowy. Niech

$$g(x) = \log(1+x), \qquad |x| < 1.$$

Funkcja pochodna rozwija się w szereg geometryczny

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

o promieniu zbieżności $r = 1$, więc

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

dla $|x| < 1$, bo $g(0) = 0$.

7.26. Przykład. Pamiętamy, że

$$\frac{1}{n+\frac{1}{2}} < \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}.$$

Postaramy się teraz wzmocnić te oszacowania, zmniejszając nieco prawą stronę, a zwiększając lewą. Dla $0 < x < 1$ mamy

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}, \qquad \log(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n},$$

więc

$$\log\frac{1+x}{1-x} = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} > 2x + \frac{2x^3}{3}$$

oraz

$$\begin{aligned} \log\frac{1+x}{1-x} &= 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \\ &< 2x + \frac{2}{3}x^3 \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} = 2x + \frac{2x^3}{3(1-x^2)}. \end{aligned}$$

Podstawiając $x = \frac{1}{2n+1}$, otrzymujemy

$$\frac{1}{n+\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{1}{12(n+\frac{1}{2})^2}\right) < \log\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{1}{12n(n+1)}\right). \tag{7.27}$$

W tym miejscu pozwolimy sobie na dygresję i pokażemy, jak można wykorzystać tak subtelne nierówności.

7.28. Twierdzenie (wzór Stirlinga). *Istnieje stała $A > 0$, taka że dla każdego $n \in \boldsymbol{N}$*

$$A < \frac{n! e^n}{n^{n+1/2}} < A e^{1/12n}.$$

Dowód. Niech $s_n = \frac{n! e^n}{n^{n+1/2}}$. Mamy

$$\log \frac{s_n}{s_{n+1}} = (n+1/2)\log(1+1/n) - 1 > 0,$$

więc ciąg $\{s_n\}$ jest ściśle malejący. Jako ciąg liczb dodatnich ma granicę $A \geqslant 0$. Tę samą granicę ma ciąg $t_n = s_n e^{-\frac{1}{12n}}$, który z kolei jest ściśle rosnący, bo

$$\log \frac{t_n}{t_{n+1}} = (n+1/2)\log(1+1/n) - 1 + \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right) < 0,$$

co pokazuje, że dla każdego $n \in \boldsymbol{N}$

$$s_n e^{-\frac{1}{12n}} < A < s_n.$$

□

Stała A w rzeczywistości jest równa $A = \sqrt{2\pi}$, ale to ustalimy dopiero w rozdziale 9.

Powracamy do głównego toku wykładu. Twierdzenie Lagrange'a pozwala na następujące ważne uogólnienie.

7.29. Twierdzenie (Cauchy). *Niech $f, g : [a,b] \to \boldsymbol{R}$, gdzie $a < b$, będą funkcjami ciągłymi i różniczkowalnymi w (a,b). Niech ponadto $g'(x) \neq 0$, $a < x < b$. Wtedy istnieje $c \in (a,b)$, takie że*

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

Dowód. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $g' > 0$ na $[a,b]$. Niech $g(a) = \alpha$, $g(b) = \beta$. Wtedy

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f \circ g^{-1}(\beta) - f \circ g^{-1}(\alpha)}{\beta - \alpha},$$

więc na mocy twierdzenia Lagrange'a

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = (f \circ g^{-1})'(\gamma) = \frac{f'(g^{-1}(\gamma))}{g'(g^{-1}(\gamma))}$$

dla pewnego $\alpha < \gamma < \beta$. Kładąc $c = g^{-1}(\gamma)$, otrzymujemy tezę. □

7.30. *Uwaga.* Często wygodnie jest punkt pośredni czy to w twierdzeniu Lagrange'a, czy Cauchy'ego, zapisywać w postaci

$$c = a + \theta(b-a),$$

gdzie $\theta \in (0,1)$. Zauważmy też, że oba wzory obowiązują także dla $b < a$.

7.31. Przykład. Niech $f(x) = \sin x$. Stosując twierdzenie Lagrange'a z $a = 0$, $b = x$, otrzymujemy

$$\sin x = x \cos \theta x, \qquad x \in \boldsymbol{R},$$

dla pewnego $0 < \theta < 1$. Natomiast stosując twierdzenie Cauchy'ego do funkcji $f(x) = \sin x$ i $g(x) = x^2$ na tym samym przedziale, mamy

$$\frac{\sin x}{x^2} = \frac{\cos \vartheta x}{2\vartheta x},$$

skąd

$$\sin x = \frac{x \cos \vartheta x}{2\vartheta}$$

dla pewnego $0 < \vartheta < 1$.

Jako wniosek z twierdzenia Cauchy'ego można otrzymać tak bardzo lubiane reguły de l'Hospitala.

7.32. Wniosek (Pierwsza reguła de l'Hospitala). *Niech będą dane funkcje różniczkowalne*

$$f, g : (a, b) \to \boldsymbol{R},$$

gdzie $a \in \boldsymbol{R}$, $b \in \boldsymbol{R}$. *Załóżmy, że* $g'(x) \neq 0$ *dla* $a < x < b$. *Wtedy warunki*

$$\lim_{x \to b-} f(x) = \lim_{x \to b-} g(x) = 0, \qquad \lim_{x \to b-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \beta$$

pociągają

$$\lim_{x \to b-} \frac{f(x)}{g(x)} = \beta.$$

Dowód. Rozszerzamy nasze funkcje w sposób ciągły na przedział $(a, b]$, kładąc $f(b) = g(b) = 0$. Wówczas dla dowolnego $x \in (a, b)$ na mocy twierdzenia Cauchy'ego istnieje $\xi \in (x, b)$, takie że

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(b)}{g(x) - g(b)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Gdy $x \to b-$, to także $\xi \to b-$, skąd natychmiast wynika teza. □

7.33. *Uwaga.* Warunek

$$\lim_{x \to b-} f(x) = \lim_{x \to b-} g(x) = 0$$

nazywa się krótko *symbolem* $\frac{0}{0}$ lub *nieoznaczonością typu* $\frac{0}{0}$.

7.34. Wniosek (Druga reguła de l'Hospitala). *Niech będą dane funkcje różniczkowalne*

$$f, g : (a, b) \to \boldsymbol{R},$$

gdzie $a \in \boldsymbol{R}$, $b \in \boldsymbol{R}$. *Załóżmy, że* $g'(x) \neq 0$ *dla* $a < x < b$. *Wtedy warunki*

$$\lim_{x \to b-} f(x) = \lim_{x \to b-} g(x) = \infty, \qquad \lim_{x \to b-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \beta$$

pociągają

$$\lim_{x \to b-} \frac{f(x)}{g(x)} = \beta.$$

Dowód. Możemy przyjąć, że $g'(x) > 0$, a więc, że g jest ściśle rosnąca. Niech $x_n \to b$ i $a < x_n < x_{n+1} < b$. Na mocy twierdzenia Cauchy'ego dla każdego $n \in \boldsymbol{N}$ istnieje $x_n < \xi_n < x_{n+1}$, takie że

$$\frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{g(x_{n+1}) - g(x_n)} = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} \to \beta,$$

skąd na mocy twierdzenia Stolza

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \beta,$$

co wobec dowolności ciągu $x_n \to b-$ oznacza, że

$$\lim_{x \to b-} \frac{f(x)}{g(x)} = \beta.$$

□

7.35. *Uwaga.* Warunek

$$\lim_{x \to b-} f(x) = \lim_{x \to b-} g(x) = \infty$$

nazywa się krótko *symbolem* $\frac{\infty}{\infty}$ lub *nieoznaczonością typu* $\frac{\infty}{\infty}$.

7.36. *Uwaga.* Czytelnik nie powinien mieć wątpliwości, że analogiczne reguły dotyczą też granic prawostronnych w punkcie a przy odpowiednio zmodyfikowanych założeniach. Reguły de l'Hospitala pozostają w mocy także, gdy $b = \infty$ ($a = -\infty$) lub $\beta = \pm\infty$, co pozostawiamy do sprawdzenia dociekliwemu Czytelnikowi.

7.37. Przykład. Rozważmy granicę

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^2}.$$

Jest to granica typu $\frac{0}{0}$, gdzie obie funkcje

$$f(x) = \sin x - x, \quad g(x) = x^2,$$

są różniczkowalne na $\boldsymbol{R} \setminus \{0\}$. Badamy granicę ilorazu pochodnych

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{2x} = \frac{1}{2}(\cos x)'\Big|_{x=0} = 0$$

i, stosując pierwszą regułę de l'Hospitala, wnosimy, że

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^2} = 0.$$

7.38. Przykład. Mamy także

$$\frac{(\log x)'}{(x^a)'} = \frac{x^{-1}}{ax^{a-1}} = \frac{x^{-a}}{a} \to 0, \qquad x \to \infty,$$

dla każdego $a > 0$, skąd na mocy drugiej reguły de l'Hospitala

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^a} = 0, \qquad a > 0.$$

7.39. Przykład. Niech $f(x) = x^2 \sin 1/x$ i $g(x) = \log(1+x)$. Wtedy

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin 1/x}{\log(1+x)} = 0,$$

natomiast

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = 2x(1+x)\sin 1/x - (1+x)\cos 1/x$$

nie ma granicy, gdy $x \to 0$. Tak więc nieistnienie granicy ilorazu pochodnych nie świadczy o nieistnieniu granicy ilorazu funkcji.

Niech $f : (a,b) \to \boldsymbol{R}$ będzie funkcją różniczkowalną. Może się okazać, że funkcja pochodna f' jest różniczkowalna w jakimś punkcie $x_0 \in (a,b)$. Mówimy wtedy, że funkcja f jest *dwukrotnie różniczkowalna* w x_0, a pochodną $(f')'(x_0)$ nazywamy *drugą pochodną* f w x_0 i oznaczamy przez $f''(x_0)$. Piszemy także

$$f''(x_0) = \frac{d^2}{dx^2} f(x)\Big|_{x=x_0}.$$

7.40. *Niech będzie dana funkcja f określona w otoczeniu punktu x_0 i dwukrotnie różniczkowalna w tym punkcie. Wtedy istnieje funkcja Ω określona w otoczeniu 0, taka że*

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2} f''(x_0)h^2 + \Omega(h), \tag{7.41}$$

gdzie

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Omega(h)}{h^2} = 0.$$

Dowód. Mamy
$$\frac{\Omega(h)}{h^2} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h - \frac{1}{2}f''(x_0)h^2}{h^2},$$
skąd na mocy twierdzenia Cauchy'ego
$$\lim_{h\to 0} \frac{\Omega(h)}{h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x_0+\theta h) - f'(x_0)}{2\theta h} - \frac{1}{2}f''(x_0) = 0.$$
□

7.42. *Niech będzie dana funkcja f określona w otoczeniu punktu x_0 i dwukrotnie różniczkowalna w tym punkcie. Jeśli istnieją liczby a, b, c, takie że*
$$f(x_0+h) = a + bh + ch^2 + \Omega(h),$$
gdzie $\lim_{h\to 0} \frac{\Omega(h)}{h^2} = 0$, *to*
$$a = f(x_0), \qquad b = f'(x_0), \qquad c = \frac{1}{2}f''(x_0).$$

Dowód. Przechodząc z h do granicy w zerze, widzimy, że $a = f(x_0)$. Podstawiając tę wartość do wzoru i dzieląc przez h, dostajemy
$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = b + ch + \frac{\Omega(h)}{h},$$
skąd po przejściu z h do zera mamy $b = f'(x_0)$. Aby obliczyć c, napiszmy
$$c = \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h}{h^2} + \frac{\Omega(h)}{h^2}.$$
Stąd na mocy twierdzenia Cauchy'ego
$$\begin{aligned} c &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h}{h^2} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f'(x_0+\theta h) - f'(x_0)}{2\theta h} = \frac{1}{2}f''(x_0). \end{aligned}$$
□

7.43. Przykład. Niech
$$f(x) = (\sin x + x)^2 = \sin^2 x + 2x\sin x + x^2.$$
Jako że
$$\sin x = x + r_3(x), \qquad \lim_{x\to 0} \frac{r_3(x)}{x^2} = 0,$$
mamy
$$f(x) = 4x^2 + 4xr_3(x) = 4x^2 + R_3(x), \qquad \lim_{x\to 0} \frac{R_3(x)}{x^2} = 0.$$
Dlatego
$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = 8.$$

7.44. Przykład. Okazuje się, że istnieją jednak funkcje różniczkowalne spełniające warunek (7.42), lecz nie mające w x_0 drugiej pochodnej. Przykładem takiej funkcji jest
$$\varphi(x) = \begin{cases} x^3 \cos\frac{1}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$
Rzeczywiście, $|\varphi(x)| \leqslant |x|^3$ oraz
$$\varphi'(x) = \begin{cases} 3x^2 \cos\frac{1}{x^2} + 2\sin\frac{1}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

ale iloraz różnicowy

$$\frac{\varphi'(x) - \varphi'(0)}{x} = 3x \cos \frac{1}{x^2} + x^{-1} \sin \frac{1}{x^2}$$

nie ma granicy przy $x \to 0$.

7.45. Wniosek. *Jeżeli f jest funkcją określoną w otoczeniu punktu a i dwukrotnie różniczkowalną w a, to warunki*

$$f'(a) = 0, \qquad f''(a) \neq 0$$

pociągają istnienie w a ścisłego ekstremum lokalnego. Jeśli $f'(a) > 0$, jest to minimum. Jeśli zaś $f'(a) < 0$ – maksimum.

Dowód. Rzeczywiście, na mocy (7.40)

$$f(a+h) - f(a) = \left(\frac{1}{2} f''(a) + \frac{\Omega(h)}{h^2}\right) h^2$$

dla małych h, gdzie znak wyrażenia po prawej zależy tylko od $f''(a)$, gdyż

$$\frac{\Omega(h)}{h^2} \to 0, \qquad h \to 0.$$

□

Pochodne wyższych rzędów definiujemy indukcyjnie. Aby można było mówić o *pochodnej rzędu* $n+1$ w punkcie x_0, funkcja f musi być n-krotnie różniczkowalna w *pewnym otoczeniu* x_0. Jeśli funkcja pochodna rzędu n, którą oznaczamy przez $f^{(n)}$, jest różniczkowalna w x_0, to jej pochodną nazywamy pochodną rzędu $n+1$ funkcji f w x_0. Zatem

$$f^{(n+1)}(x_0) = (f^{(n)})'(x_0).$$

Pochodną rzędu n nazywamy też krótko n-tą pochodną. Piszemy także

$$f^{(n)}(x_0) = \frac{d^n}{dx^n} f(x)\big|_{x=x_0}.$$

7.46. Przykład. Niech

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad |x| < r,$$

gdzie $r > 0$ jest promieniem zbieżności szeregu. Wiemy, że szereg potęgowy jest różniczkowalny w otwartym przedziale zbieżności i jego pochodna wyraża się szeregiem potęgowym o tym samym promieniu zbieżności. Stąd natychmiast wynika, że funkcja f ma pochodne wszystkich rzędów. Wiemy też, że dla każdego $a \in (-r, r)$

$$f(a+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(a) h^n, \qquad |h| < r - |a|,$$

gdzie

$$\alpha_n(a) = \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} a_k h^{k-n} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Zatem

$$f(a+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} h^n, \qquad |h| < r - |a|.$$

Co więcej, dla każdego $N \in \boldsymbol{N}$ mamy

$$f(a+h) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} h^n + r_{N+1}(h),$$

gdzie

$$|r_{N+1}(h)| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} h^n \right| \leqslant C_{N+1}|h|^{N+1}, \qquad |h| \leqslant r/2.$$

Czytelnik powinien skojarzyć ten przykład z poznanymi już wcześniej rozwinięciami funkcji wykładniczej.

Przechodzimy do twierdzenia Taylora.

7.47. Twierdzenie (Wzór Taylora). *Niech f będzie funkcją n-krotnie różniczkowalną w pewnym otoczeniu $a \in \boldsymbol{R}$. Wtedy dla dostatecznie małych h*

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + r_{n+1}(h),$$

gdzie

$$\lim_{h \to 0} \frac{r_{n+1}(h)}{h^n} = 0. \tag{7.48}$$

Dowód. Przeprowadzimy rozumowanie indukcyjne. Warunek początkowy dla $n = 0$ to po prostu definicja pochodnej.

Zauważmy następnie, że

$$r'_{n+1}(h) = f'(a) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(f')^{(k)}(a)}{k!} h^k.$$

Zatem pochodna r'_{n+1} jest resztą stopnia n funkcji pochodnej f'. Jeśli zatem założymy indukcyjnie, że wzór (7.48) jest spełniony dla pewnego $n - 1 \geqslant 1$ w przypadku funkcji pochodnej, to stosując pierwszą regułę de l'Hospitala, otrzymamy

$$\lim_{h \to 0} \frac{r_{n+1}(f,h)}{h^n} = \frac{1}{n} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{r_n(f',h)}{h^{n-1}} = 0$$

a o to właśnie nam chodziło. □

Resztę r_n we wzorze Taylora można zapisać precyzyjniej.

7.49. Wniosek. *Przy założeniach twierdzenia Taylora*

$$r_n(h) = \frac{f^{(n)}(a+\theta h)}{n!} h^n.$$

dla pewnego $\theta \in (0,1)$.

Dowód. Przypomnijmy, że

$$r_n(h) = r_n(f,h) = f(a+h) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k.$$

Znowu zastosujemy indukcję. Warunek początkowy

$$r_1(h) = f(a+h) - f(a) = f'(a+\theta h)h$$

to po prostu twierdzenie Lagrange'a.

Załóżmy następnie podobnie jak w dowodzie twierdzenia Taylora, że wzór na resztę obowiązuje w przypadku reszty $r_{n-1}(f',h)$. Wtedy na mocy twierdzenia Cauchy'ego

$$\frac{r_n(h)}{h^n} = \frac{r'_n(\theta h)}{n(\theta h)^{n-1}} = \frac{f^{(n)}(a+\theta_1\theta h)}{n!} = \frac{f^{(n)}(a+\theta_2 h)}{n!},$$

skąd natychmiast wynika żądana równość. □

7.50. Wniosek. *Przy założeniach twierdzenia Taylora*

$$\lim_{h\to 0} \frac{r_n(h)}{h^n} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

7.51. *Uwaga.* Przypuśćmy, że funkcja f jest n-krotnie różniczkowalna w otoczniu punktu a o promieniu $\delta > 0$. Wzór Taylora można zapisać wtedy w nieco innej postaci. Mianowicie, dla $x \in (a-\delta, a+\delta)$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n(a,x),$$

gdzie oczywiście $R_n(a,x) = r_n(a, x-a)$ i

$$\lim_{x\to a} \frac{R_n(a,x)}{(x-a)^n} = 0.$$

7.52. Wniosek. *Przy założeniach twierdzenia Taylora*

$$r_n(h) = \frac{(1-\vartheta)^{n-1} f^{(n)}(a+\vartheta h)}{(n-1)!} h^n.$$

dla pewnego $\vartheta \in (0,1)$ *i* $n \geqslant 1$. *Innymi słowy,*

$$R_n(a,x) = \frac{(1-\vartheta)^{n-1} f^{(n)}(a+\vartheta(x-a))}{(n-1)!}(x-a)^n.$$

Dowód. Dla x, y leżących dostatecznie blisko a zdefiniujmy pomocniczą funkcję

$$g(y) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(y)}{k!}(x-y)^k,$$

gdzie x traktujemy jako ustalony parametr. Zauważmy, że

$$g(a) = R_n(a,x), \qquad g(x) = 0. \tag{7.53}$$

Mamy

$$\begin{aligned} g'(y) &= -f'(y) - \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{f^{(k+1)}(y)}{k!}(x-y)^k - \frac{f^{(k)}(y)}{(k-1)!}(x-y)^{k-1} \right) \\ &= -\frac{f^{(n)}(y)}{(n-1)!}(x-y)^{n-1}, \end{aligned}$$

więc, uwzględniając (7.53), na mocy twierdzenia Lagrange'a wnosimy, że istnieje $0 < \theta < 1$, taka że

$$\begin{aligned} R_n(a,x) &= g(a) - g(x) = g'(x + \theta(a-x))(a-x) \\ &= \frac{(1-\vartheta)^{n-1} f^{(n)}(a+\vartheta(x-a)}{(n-1)!}(x-a)^n, \end{aligned}$$

gdzie dokonaliśmy podstawienia $\theta = 1-\vartheta$. Oczywiście $0 < \vartheta < 1$. □

Przy ustalonym a wielomian

$$\varphi_n(h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k,$$

nazywamy *wielomianem Taylora*, a resztę $r_{n+1}(h)$ – *resztą Peano* rozwinięcia funkcji f. Jak widzieliśmy, reszta r_n może być zapisana za pomocą n-tej pochodnej f w *postaci Lagrange'a* (Wniosek 7.49) lub *postaci Cauchy'ego* (Wniosek 7.52).

Czasem można otrzymać rozwinięcie funkcji w sumę częściową szeregu potęgowego, nie wiedząc dokładnie, jak wyglądają jej pochodne. Kolejne twierdzenie umożliwia sprawdzenie, czy dane rozwinięcie jest rzeczywiście rozwinięciem Taylora.

7.54. Twierdzenie. *Niech f będzie funkcją n-krotnie różniczkowalną w przedziale otwartym I. Jeśli dla pewnego $x_0 \in I$ i dostatecznie małych h*

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{n} c_k h^k + \rho_{n+1}(h),$$

gdzie

$$\lim_{h \to 0} \frac{\rho_{n+1}(h)}{h^n} = 0,$$

to

$$c_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \qquad 0 \leqslant k \leqslant n.$$

Zatem $\rho_{n+1}(h) = r_{n+1}(h)$ jest resztą Peano.

Dowód. Twierdzenie to udowodniliśmy już w przypadku $1 \leqslant n \leqslant 2$. Załóżmy więc jego prawdziwość dla pewnego n. Wtedy

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{n+1} c_k h^k + \rho_{n+2}(h) = \sum_{k=0}^{n} c_k h^k + \rho_{n+1}(h),$$

gdzie $\rho_{n+1}(h) = c_{n+1} h^{n+1} + \rho_{n+2}(h)$ spełnia warunek rzędu malenia. Zatem na mocy założenia indukcyjnego $\rho_{n+1} = r_{n+1}$ jest resztą Peano i mamy

$$c_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \qquad 0 \leqslant k \leqslant n.$$

Aby zakończyć dowód, wystarczy teraz zauważyć, że

$$c_{n+1} = \frac{r_{n+1}}{h^{n+1}} - \frac{\rho_{n+2}(h)}{h^{n+1}} \to \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!},$$

gdy $h \to 0$.

$\square$

Rozwinięcie Taylora wokół $x_0 = 0$ nazywa się także rozwinięciem *Maclaurina.*

7.55. Przykład. Rozwińmy funkcję *sinus* we wzór Maclaurina. Jako że

$$\frac{d^{2n}}{dx^{2n}} \sin x\Big|_{x=0} = 0,$$
$$\frac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}} \sin x\Big|_{x=0} = (-1)^n \cos x\Big|_{x=0} = (-1)^n$$

dla $n \in \boldsymbol{N} \cup \{0\}$, rozwinięcie przyjmuje postać

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + r_{2n+1}(x),$$

gdzie

$$r_{2n+1}(x) = (-1)^n \frac{\cos \theta_n x}{(2n+1)!} x^{2n+1},$$

dla pewnego $\theta_n \in (0, 1)$, a więc

$$|r_{2n+1}(x)| \leqslant \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

To pokazuje, że dla każdego $x \in \boldsymbol{R}$

$$\lim_{n\to\infty} r_{2n+1}(x) = 0,$$

czyli

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Przypomnijmy, że

$$\sinh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Podobieństwo tych rozwinięć tłumaczy częściowo podobieństwo nazw obu tych na pierwszy rzut oka bardzo niepodobnych funkcji.

7.56. Przykład. Niech $\alpha \in \boldsymbol{R}$. Rozwińmy funkcję $f(x) = x^\alpha$ we wzór Taylora wokół punktu $x_0 = 1$. Mamy

$$\frac{d^k x^\alpha}{dx^k} = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)x^{\alpha-k}.$$

Zatem

$$\frac{1}{k!}\frac{d^k x^\alpha}{dx^k}\bigg|_{x=1} = \binom{\alpha}{k}$$

i wzór Taylora przyjmuje postać

$$(1+h)^\alpha = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{\alpha}{k} h^k + r_n(h), \qquad |h| < 1,$$

gdzie

$$r_n(h) = n(1-\vartheta_n)^{n-1}\binom{\alpha}{n}(1+\vartheta_n h)^{\alpha-n} h^n$$

jest resztą w postaci Cauchy'ego dla odpowiedniego $0 < \vartheta_n < 1$. Prawa strona wzoru Taylora, jeśli pominąć resztę, przedstawia sumę częściową szeregu potęgowego Taylora

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} h^k,$$

którego promień zbieżności jest równy 1, a więc zbieżnego dla $|h| < 1$. Udowodnimy, że w istocie

$$(1+h)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} h^k, \qquad |h| < 1.$$

W tym celu należy wykazać, że dla każdego ustalonego $h \in (-1, 1)$

$$\lim_{n\to\infty} r_n(h) = 0.$$

Jeśli $0 < h < 1$, to

$$|r_n(h)| \leqslant n\left|\binom{\alpha}{n}\right| 1 + \vartheta h)^{\alpha-n} h^n \leqslant \left|\binom{\alpha}{n}\right| h^n$$

dla $n > \alpha$. Jeśli zaś $-1 < h < 0$, to

$$\begin{aligned}|r_n(h)| &= n(1-\vartheta_n)^{n-1}(1+\vartheta_n h)^{\alpha-n}\left|\binom{\alpha}{n}\right| h^n \\ &= n\left(\frac{1-\vartheta_n}{1+\vartheta_n h}\right)^{n-1}(1+\vartheta_n h)^{\alpha-1}\left|\binom{\alpha}{n}\right| h^n \leqslant n(1-|h|)^{-1}\left|\binom{\alpha}{n}\right| h^n.\end{aligned}$$

Widzimy więc, że dla $-1 < h < 1$

$$|r_n(h)| \leqslant n\left|\binom{\alpha}{n}\right|(1-|h|)^{-1}|h|^n,$$

a ponieważ

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\binom{\alpha}{n}h^n$$

jest szeregiem potęgowym o promieniu zbieżności $r = 1$, więc $r_n(h) \to 0$.

7.57. Przykład. Zastosujmy wzór z poprzedniego przykładu w przypadku $\alpha = \frac{1}{2}$. Mamy

$$\sqrt{1+h} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{k}h^k, \qquad |h| < 1,$$

gdzie

$$\binom{\frac{1}{2}}{k} = (-1)^{k-1}\frac{4^{-k}}{2k-1}\binom{2k}{k}, \qquad k \geqslant 1.$$

Biorąc $\alpha = -\frac{1}{2}$ i $h = -x^2$, otrzymujemy

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{k}(-1)^k x^{2k},$$

gdzie

$$(-1)^k\binom{-\frac{1}{2}}{k} = 4^{-k}\binom{2k}{k}.$$

Wobec tego

$$(\arcsin x)' = \sum_{k=0}^{\infty} 4^{-k}\binom{2k}{k}x^{2k},$$

a stąd

$$\arcsin x = \sum_{k=0}^{\infty} 4^{-k}\binom{2k}{k}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

dla $|x| < 1$. W szczególności pamiętając, że $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, mamy

$$\frac{\pi}{3} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{16^{-k}}{2k+1}\binom{2k}{k}.$$

I jeszcze jeden przykład.

7.58. Przykład. Niech

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Nie ma wątpliwości, że nasza funkcja jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna poza zerem. Aby zbadać jej różniczkowalność w punkcie $x = 0$, sprawdźmy najpierw przez indukcję, że dla każdego $n \in \boldsymbol{N} \cup \{0\}$ i każdego $x \neq 0$

$$f^{(n)}(x) = \frac{p_n(x)}{x^{3n}}e^{-1/x^2}, \tag{7.59}$$

gdzie p_n jest pewnym wielomianem. Rzeczywiście, dla $n = 0$, $p_0(x) = 1$. Natomiast

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \left(\frac{p_n'(x)x^{3n} - 3nx^{3n-1}p_n(x)}{x^{6n}} - \frac{p_n}{x^{3n}} \cdot \frac{2}{x^3} \right) e^{-1/x^2} \\ &= \frac{p_{n+1}(x)}{x^{3(n+1)}} e^{-1/x^2}, \end{aligned}$$

gdzie

$$p_{n+1}(x) = x^3 p_n'(x) + (3nx^2 + 2)p_n(x).$$

Ze wzoru (7.59) i nierówności

$$e^{-1/x^2} \leqslant N! x^{2N}$$

prawdziwej dla każdego $N \in \boldsymbol{N}$ wynika, że

$$\lim_{x \to 0} f^{(n)}(x) = 0$$

dla każdego $n \in \boldsymbol{N}$, a stąd przez indukcję, że f ma wszystkie pochodne w zerze i

$$f^{(n)}(0) = 0, \qquad n \in \boldsymbol{N}.$$

Wobec tego rozwinięcie Taylora funkcji f wokół zera przyjmuje dla dowolnego n postać

$$f(h) = r_n(h).$$

Widać też, że funkcja f nie rozwija się w szereg Taylora, bo to oznaczałoby, że jest funkcją zerową, a tak oczywiście nie jest.

Mówimy, że funkcja f określona na przedziale $I \subset \boldsymbol{R}$ jest *wypukła*, jeśli dla każdych $x, y \in I$ i każdego $0 < \lambda < 1$

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leqslant (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y). \tag{7.60}$$

Aby lepiej zrozumieć tę definicję, zauważmy, że sieczna wykresu funkcji f przechodząca przez punkty $(x, f(x))$ i $(y, f(y))$ jest wykresem funkcji liniowej

$$g_{x,y}(t) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}(t - x) + f(x) = \left(1 - \frac{t-x}{y-x}\right) f(x) + \frac{t-x}{y-x} f(y),$$

a każdy punkt $t \in (x, y)$ można zapisać jako

$$t = \left(1 - \frac{t-x}{y-x}\right) x + \frac{t-x}{y-x} y = (1-\lambda_t)x + \lambda_t y.$$

Wstawiając tę właśnie wartość $\lambda = \lambda_t$ do (7.60), widzimy, że wypukłość f jest równoważna warunkowi

$$f(t) \leqslant g_{x,y}(t), \qquad t \in (x, y), \quad x, y \in I.$$

Zatem funkcja f jest wypukła, wtedy i tylko wtedy gdy dla każdych $x, y \in I$ wykres funkcji na odcinku $[x, y]$ leży nie wyżej niż sieczna wykresu w punktach o odciętych x, y.

Mówimy, że funkcja f określona na przedziale $I \subset \boldsymbol{R}$ jest *ściśle wypukła*, jeśli dla każdych $x \neq y$ z przedziału I i każdego $0 < \lambda < 1$

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) < (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y). \tag{7.61}$$

7.62. *Uwaga.* Jeśli $f : I \to \boldsymbol{R}$ jest ciągła, to warunek

$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}, \qquad x, y \in I,$$

pociąga wypukłość. Rzeczywiście, gdyby dla pewnego $c = (1-\lambda)x + \lambda y$ zachodziła nierówność $f(c) > g_{x,y}(c)$, to ze względu na ciągłość f mielibyśmy $f(z) > g_{x,y}(z)$ dla z z pewnego odcinka wokół c. Niech teraz

$$a = \inf\{z < c : f(z) > g_{x,y}(z)\}, \qquad b = \sup\{z > c : f(z) > g_{x,y}(z)\}.$$

Wtedy $x \leqslant a < c < b \leqslant y$ i $g_{x,y}(a) = f(a)$, $g_{x,y}(b) = f(b)$, więc $g_{x,y} = g_{a,b}$. Mamy zatem

$$f(z) > g_{a,b}(z), \qquad a < z < b,$$

co dla $z = \frac{a+b}{2}$ daje sprzeczność z założeniem.

7.63. Twierdzenie. *Funkcja $I \to \boldsymbol{R}$ jest wypukła, wtedy i tylko wtedy gdy dla każdych $x, c, y \in I$*

$$x < c < y \implies \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leqslant \frac{f(y)-f(c)}{y-c}. \tag{7.64}$$

Dowód. Niech

$$c = (1-\lambda)x + \lambda y, \qquad \lambda = \frac{c-x}{y-x}.$$

Warunek wypukłości

$$f(c) \leqslant (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

przekształcamy, korzystając z $f(c) = (1-\lambda)f(c) + \lambda f(c)$ do równoważnej postaci

$$(1-\lambda)(f(c)-f(x)) \leqslant \lambda(f(y)-f(c)),$$

skąd po podstawieniu wartości λ łatwo dostajemy warunek (7.64). □

7.65. Wniosek. *Funkcja f jest ściśle wypukła, wtedy i tylko wtedy gdy spełnia warunek* (7.64) *z ostrą nierównością.*

7.66. Wniosek. *Jeśli $f : I \to \boldsymbol{R}$ jest (ściśle) wypukła, to dla każdego $c \in I$ funkcja*

$$f_c(x) = \frac{f(x)-f(c)}{x-c}, \qquad x \in I \setminus \{c\},$$

jest (ściśle) rosnąca.

Dowód. Niech f bedzie wypukła. Jeśli $x < c < y$, to $f_c(x) \leqslant f_c(y$ na mocy warunku (7.64). Niech więc teraz $x < y < c$. Mamy

$$y = (1-\lambda)x + \lambda c, \qquad \lambda = \frac{y-x}{c-x},$$

i na mocy warunku wypukłości

$$f(y) \leqslant (1-\lambda)f(x) + \lambda f(c) \leqslant (1-\lambda)(f(x)-f(c)) + f(c),$$

skąd po prostych przekształceniach otrzymujemy tezę. Jeśli $c < x < y$, rozumujemy podobnie. W przypadku ścisłej wypukłości należy tylko pamiętać, że wszystkie nierówności są ostre. □

7.67. Wniosek. *Funkcja różniczkowalna $f : (a,b) \to \boldsymbol{R}$ jest (ściśle) wypukła, wtedy i tylko wtedy gdy f' jest (ściśle) rosnąca.*

Dowód. Jeśli f' jest (ściśle) rosnąca, (ścisła) wypukłość f wynika z oczywistego zastosowania twierdzenia o wartości średniej. Odwrotna implikacja wynika z (7.64) oraz Wniosku 7.66. □

7.68. Wniosek. *Funkcja dwukrotnie różniczkowalna $f : (a,b) \to \boldsymbol{R}$ jest wypukła, wtedy i tylko wtedy gdy f'' jest nieujemna.*

7.69. Wniosek. *Jeśli* $f : (a, b) \to \boldsymbol{R}$ *jest dwukrotnie różniczkowalna i* f'' *jest dodatnia, to* f *jest ściśle wypukła.*

Mówimy, że funkcja $f : I \to \boldsymbol{R}$ jest *(ściśle) wklęsła*, jeżeli funkcja $-f$ jest (ściśle) wypukła.

Niech $f : (a, b) \to \boldsymbol{R}$ będzie ciągła. Jeśli punkt $c \in (a, b)$ ma tę własnosc, że dla pewnego dostatecznie małego $\epsilon > 0$ funkcja f jest ściśle wypukła na przedziale $(c - \epsilon, c)$ i ściśle wklęsła na przedziale $(c, c + \epsilon)$ lub też na odwrót, to punkt c nazywa się *punktem przegięcia* funkcji f.

7.70. *Uwaga.* Z definicji wynika natychmiast, że jeśli druga pochodna dwukrotnie różniczkowalnej funkcji f zmienia znak w punkcie c, to jest on punktem przegięcia.

7.71. *Niech* $n \geqslant 2$. *Niech będzie dana funkcja* f *różniczkowalna* n *razy w otoczeniu punktu* c. *Załóżmy, że*

$$f'(c) = f''(c) = \cdots = f^{n-1}(c) = 0$$

oraz

$$f^{(n)}(c) \neq 0.$$

Jeżeli n *jest parzyste, to punkt* c *jest punktem ścisłego ekstremum lokalnego, a jeśli nieparzyste – punktem przegięcia.*

Dowód. Przypuśćmy najpierw, że n jest parzyste i rozwińmy we wzór Taylora pochodną f' wokół punktu c. Mamy

$$f'(c + h) = \frac{f^{(n)}(c)}{(n-1)!} h^{n-1} + r_n(h) = \left(\frac{f^{(n)}(c)}{(n-1)!} + \frac{r_n(h)}{h^{n-1}} \right) h^{n-1},$$

gdzie

$$\lim_{h \to 0} \frac{r_n(h)}{h^{n-1}} = 0.$$

Widać więc, że wobec nieparzystości $n - 1$ pochodna f' zmienia znak w punkcie c, co dowodzi, że c jest punktem ścisłego ekstremum.

Jeśli natomiast n jest nieparzyste, to rozwijamy drugą pochodną we wzór Taylora wokół c i widzimy, że

$$f''(c + h) = \frac{f^{(n)}(c)}{(n-2)!} h^{n-2} + r_{n-1}(h) = \left(\frac{f^{(n)}(c)}{(n-2)!} + \frac{r_{n-1}(h)}{h^{n-2}} \right) h^{n-2},$$

gdzie

$$\lim_{h \to 0} \frac{r_{n-1}(h)}{h^{n-2}} = 0.$$

więc teraz wobec nieparzystości $n - 2$ druga pochodna zmienia znak w c. Zatem c jest punktem przegięcia. $\square$

Zadania

1. Wyprowadź wzory $(\sin)' = \cos$, $(\cos)' = -\sin$.

2. Wykaż, że funkcje $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ i $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ są wzajemnie jednoznaczne.

3. Pokaż, że $\frac{d}{dx} \operatorname{tg} x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$.

4. Zróżniczkuj funkcje:

$$\frac{x^2 + 2x + 4}{x^4 - 1}, \quad \sqrt{2x - x^2}, \quad \frac{x}{\sqrt{1 + x^3}}, \quad \operatorname{tg} x, \quad \operatorname{ctg} x, \quad \log \sin x, \quad \log \operatorname{tg} x,$$

$$\arcsin(1 - x), \quad \log \sinh x, \quad \cosh(\sinh x), \quad e^{e^{x^2}}, \quad \operatorname{tg}^4 x, \quad \exp(\exp(\exp x)).$$

5. Znajdź pochodne funkcji $\arccos : (-1, 1) \to (0, 2\pi)$ i $\arctan : \boldsymbol{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

6. Udowodnij, że jeśli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x, to

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x - h)}{2h}.$$

7. Udowodnij, że jeśli funkcja ciągła ma maksima lokalne w punktach $a < b$, to ma też minimum lokalne w pewnym punkcie $a < c < b$.

8. Sprawdź wzory $(\sinh)' = \cosh$, $(\cosh)' = \sinh$ przez zróżniczkowanie odpowiednich szeregów.

9. Czy istnieje funkcja $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, taka że $f'(x) = \mathbf{m}(x)$ dla $x \in \boldsymbol{R}$?

10. Wykaż, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos^2 n}{n}$ jest warunkowo zbieżny.

11. Znajdź ekstrema lokalne funkcji $\varphi(x) = |x + 1| + |x| + |x - 1|$ i punkty, w których funkcja ta jest różniczkowalna.

12. Dla jakich $a \in \boldsymbol{R}$ funkcja $\psi(x) = \cos \frac{1}{x}$ dla $x \neq 0$ i $\psi(0) = a$ ma własność Darboux?

13. Znajdź styczną do wykresu funkcji $y = |x|^{3/2}$ w punkcie $x = 0$.

14. Zbadaj różniczkowalność funkcji $f(x) = \mathbf{m}(x)^{\mathbf{m}(x)}$.

15. Dana jest nieznikająca funkcja ciągła f na $[a, b]$, która jest ponadto różniczkowalna w (a, b). Pokaż, że istnieje $a < \xi < b$, takie że

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(a) f(b) f'(\xi)}{f(\xi)^2}.$$

W tym celu zastosuj twierdzenie Lagrange'a do funkcji $1/f$.

16. Dana jest dodatnia funkcja ciągła f na $[a, b]$, która jest ponadto różniczkowalna w (a, b). Pokaż, że istnieje $a < \xi < b$, takie że

$$\frac{f(b)}{f(a)} = \exp\left\{\frac{f'(\xi)(b - a)}{f(\xi)}\right\}.$$

W tym celu zastosuj twierdzenie Lagrange'a do funkcji $\log f$.

17. Dana jest funkcja f różniczkowalna w pewnym otoczeniu punktu a. Nawet gdy f' nie jest ciągła w a (podaj taki przykład), istnieje ciąg $0 \neq h_n \to 0$, taki że $f'(a + h_n) \to f'(a)$.

18. Wiedząc, że $f, g \in C([a, b]$ są różniczkowalne w (a, b) i nigdzie nie znikają, pokaż, że istnieje $c \in (a, b)$, takie że

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c) g(c)^2}{g'(c) f(c)^2}.$$

W tym celu zastosuj twierdzenie Cauchy'ego do funkcji $1/f$ i $1/g$.

19. Wiedząc, że funkcje f i g są różniczkowalne w punkcie a, oblicz granicę

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)g(a) - f(a)g(x)}{x - a}.$$

20. Wiedząc, że funkcja f jest różniczkowalna w punkcie a, oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty} n\Big(f(a + \frac{1}{n}) - f(a)\Big).$$

21. Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty} n\Big(\sin^4 \frac{n}{n+1} - \sin^4 1\Big).$$

22. Udowodnij, że funkcja pochodna funkcji nieparzystej (parzystej) jest parzysta (nieparzysta), a funkcja pochodna funkcji okresowej jest okresowa z tym samym okresem.

23. Dana jest rosnąca funkcja różniczkowalna $f : (a, b) \to \boldsymbol{R}$. Pokaż, że f jest ściśle rosnąca wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór tych punktów x, w których $f'(x) > 0$, jest gęsty w (a, b).

24. Czy funkcja Heaviside'a

$$\sigma(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases}$$

jest funkcją pochodną? W których punktach jest różniczkowalna? W których jest ciągła?

25. Wykaż, że funkcje

$$x \mapsto x|x|, \qquad x \mapsto |x|^3, \qquad x \mapsto \sigma(x)\sin^2 x \qquad x \mapsto |x|\sin^2 x$$
$$x \mapsto \mathbf{m}(x)\sin^2 \pi x \qquad x \mapsto (\sin x + |\sin x|)^2 \qquad x \mapsto |\sin x|^{3/2}$$

są wszędzie różniczkowalne i oblicz ich pochodne.

26. Funkcja f jest różniczkowalna w punkcie a i $f(a) > 0$. Oblicz

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\frac{f(a + \frac{1}{n})}{f(a)}\Big)^n.$$

27. Oblicz granicę $\lim_{x\to 0} x^{x^{\sin x}}$.

28. Dla jakich wartości $a \in \boldsymbol{R}$ funkcja $x \mapsto ax - \sin x$ jest rosnąca na $\boldsymbol{R}$?

29. Wykaż przez różniczkowanie, że funkcja $f(x) = x\log(1 + \frac{a}{x})$ jest ściśle rosnąca na $(0, \infty)$.

30. Wykaż, że funkcja $g(x) = \log_x(x + 1)$ jest ściśle malejąca na $(1, \infty)$. Wywnioskuj stąd, że $\log_2 3 > \log_4 5$.

31. Pokaż, że

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arc\,tan}(\frac{\pi}{4} + x) - \operatorname{arc\,tan}(\frac{\pi}{4} - x)}{\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} + x) - \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} - x)} = \frac{32}{\pi^2 + 16},$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{\pi^2}{4} - \arccos x \cdot \arccos 2x}{\arcsin x} = \frac{3\pi}{2}.$$

32. Sprawdź, że $(e + x)^{e-x} > (e - x)^{e+x}$ dla $0 < x < e$.

33. Udowodnij, że $e^x < (1 + x)^{1+x}$ dla $x > 0$.

34. Udowodnij, że $(\frac{x+1}{2})^{x+1} \leqslant x^x$ dla $x > 0$.

35. Znajdź lokalne ekstrema funkcji $(0, \infty) \ni x \mapsto x^x$, $\boldsymbol{R} \ni x \mapsto x^n e^{-x}$, $\boldsymbol{R} \ni x \mapsto e^{-x^2}$, $\boldsymbol{R} \ni x \mapsto x^4(1 - x)^3$.

36. Dane są parami różne liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Znajdź minima lokalne i najmniejszą wartość funkcji a) $f(x) = \sum_{k=1}^n (x-k)^2$, b) $f(x) = \sum_{k=1}^n |x - a_k|$.

37. Znajdź największą wartość funkcji $f(x) = \frac{1}{1+|x|} + \frac{1}{1+|x-1|}$ na $\boldsymbol{R}$.

38. Znajdź najmniejszą wartość funkcji $\boldsymbol{R} \ni x \to \sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+1}$.

39. Znajdź lokalne ekstrema funkcji: $(0,\infty) \ni x \mapsto x^{1/x}$, $\boldsymbol{R} \ni x \mapsto |x|e^{-x^2}$, $\boldsymbol{R} \ni x \mapsto x + |\sin 2x|$.

40. Niech $\alpha > 1$. Udowodnij nierówność $\left(\frac{x+y}{2}\right)^\alpha < \frac{x^a+y^a}{2}$ dla $x, y > 0$, $x \neq y$.

41. Udowodnij, że funkcja różniczkowalna $f : (a,b) \to \boldsymbol{R}$ o ograniczonej pochodnej spełnia warunek Lipschitza.

42. Udowodnij, że funkcja dwukrotnie różniczkowalna $f : (a,b) \to \boldsymbol{R}$ spełnia warunek Lipschitza na każdym przedziale $[c,d] \subset (a,b)$.

43. Funkcja $f : (a,b) \to \boldsymbol{R}$ jest różniczkowalna. Ponadto $f'(x) > 0$ dla wszystkich $x \in (a,b) \backslash \{c\}$. Udowodnij, że f jest ściśle rosnąca w (a,b).

44. Dla jakich wartości $a \in \boldsymbol{R}$ funkcja $x \mapsto ax - \sin x$ jest ściśle rosnąca na $\boldsymbol{R}$?

45. Funkcję $x \to \cos x$ przedstaw w postaci szeregu potęgowego.

46. Rozwiń funkcje *sinus* i *cosinus* w szeregi potęgowe wokół punktu $x = \frac{\pi}{2}$.

47. Znajdź styczne do funkcji $0 \neq x \mapsto \log |x|$ w punktach o odciętych $x = 1$ i $x = -1$.

48. Niech $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ dla $x \neq 0$ i $f(0) = 1$. Udowodnij, że funkcja f jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna na $\boldsymbol{R}$ i oblicz wszystkie jej pochodne w 0.

49. Rozwiń w szereg Taylora funkcję $0 < x \mapsto \sqrt{x}$ wokół punktu $x = 2$.

50. Wiadomo, że funkcja f jest dwukrotnie różniczkowalna w punkcie $a \in \boldsymbol{R}$. Oblicz

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a+h)}{h^2}.$$

51. Funkcję $x \to \log(1+x^3)$ rozwiń we wzór Taylora z resztą w postaci Lagrange'a wokół punktu $x = 0$.

52. Funkcję $x \sin x - \cos x^2$ rozwiń we wzór Taylora z resztą w postaci Lagrange'a wokół punktu $x = 0$.

53. Rozwiń w szereg Taylora funkcje $f(x) = \sin x + \sinh x$ i $g(x) = \cos x + \cosh x$.

54. Dana jest różniczkowalna funkcja $f : (0,\infty) \to \boldsymbol{R}$, taka że $\lim_{x\to\infty} f(x) + f'(x) = 0$. Pokaż, że $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. [W tym celu zauważ, że $f(x) = \frac{f(x)e^x}{e^x}$ i zastosuj regułę de l'Hospitala.]

55. Znajdź największą wartość funkcji $x \to \sin^{2m} x \cos^{2n} x$ na $\boldsymbol{R}$.

56. Udowodnij nierówność Bernoulliego, stosując rachunek różniczkowy.

57. Znajdź minima lokalne funkcji $h(x) = \sqrt{|x-a|} + \sqrt{|x-b|}$, gdzie $a, b \in \boldsymbol{R}$.

58. Różniczkując k-krotnie tożsamość $(1-x)^{-1} = \sum_{n=0}^\infty x^n$, wyprowadź rozwinięcie

$$\frac{1}{(1-x)^k} = \sum_{n=0}^\infty \binom{n+k}{k} x^k = \sum_{k=0}^\infty \binom{-n}{k} (-x)^k.$$

59. Udowodnij nierówność

$$\log(1+x) < \frac{x}{\sqrt{1+x}}, \qquad x > 0.$$

60. Funkcja f jest ciągła w otoczeniu punktu x_0 i różniczkowalna poza x_0. Pokaż, że jeśli istnieje granica $f'(x)$, gdy $x \to x_0$, to f jest różniczkowalna w x_0 w sposób ciągły.

61. Wyprowadź *wzór Halphena*: $(x^{n-1}e^{1/x})^{(n)} = (-1)^n x^{-n-1} e^{1/x}$.

62. Funkcję $f(x) = \sin(\sin x)$ rozwiń we zór Taylora wokół $x = \pi$ z resztą R_5 w postaci Peano.

63. Oblicz n-tą pochodną funkcji $\frac{\log x}{x}$, $e^x \cos x$. Rozwiń te funkcje we wzór Taylora w dowolnym punkcie x z dziedziny. Reszty zapisz w postaci Cauchy'ego i Lagrange'a.

64. Funkcje $f(x) = \log(1 + x^3)$ i $g(x) = x \sin x + \cos x^2$ rozwiń we wzór Taylora do wyrazów kwadratowych dookoła dowolnego x z dziedziny, resztę R_2 zapisując w postaci Cauchy'ego i Lagrange'a.

65. Oblicz granice

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh} x - 2x}{x - \sin x}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^2}, \qquad \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x\right), \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^n) - \sin^n x}{x^{n+2}}.$$

66. Udowodnij, że jeśli $a, c > 0$, to

$$\inf_{x\in \boldsymbol{R}} \Big(\max\{|ax + b|, |cx + d|\} \Big) = \frac{|ad - bc|}{a + c}.$$

67. Niech $f : (a, b) \to (c, d)$ będzie bijekcją. Pokaż, że jeśli f jest dwukrotnie różniczkowalna w $x_0 \in (a, b)$ i $f'(x_0) \neq 0$, to f^{-1} jest dwukrotnie różniczkowalna w $y_0 = f(x_0)$ i

$$(f^{-1})''(y_0) = -\frac{f''(x_0)}{f'(x_0)^3}.$$

68. Dane są funkcje f i g różniczkowalne n razy w punkcie a. Udowodnij, że

$$(fg)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(a) g^{(n-k)}(a).$$

69. Oblicz $(x^2 e^x)^{(2003)}$ i $(x^{2002} e^{1/x})^{(2003)}$.

70. Udowodnij, że funkcja $f(x) = \frac{1}{\beta}(1 + x)^\beta - x - \frac{\beta-1}{2}x^2$ jest ściśle rosnąca (malejąca) dla $x > -1$, jeśli $\beta > 2$ $(1 < \beta < 2)$.

71. Rozwiń podane funkcje we wzór Maclaurina z resztą R_n w postaci Peano:

$$\frac{1 + x + x^2}{1 - x + x^2} \quad (n = 5), \qquad e^{2x - x^2} \quad (n = 6), \qquad \sqrt[3]{\sin x^3} \quad (n = 13), \qquad \log \frac{\sin x}{x} \quad (n = 6).$$

72. Udowodnij, że $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/2}{k} = \sqrt{2}$, $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{1/2}{k} = 0$, $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

73. Oszacuj błąd bezwzględny przybliżeń:

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \quad (0 \leqslant x \leqslant 1), \qquad \sin x \approx x - \frac{x^3}{6} \quad (|x| \leqslant \frac{1}{2}),$$

$$\operatorname{tg} x \approx x + \frac{x^3}{3} \quad (|x| \leqslant \frac{1}{10}), \qquad \sqrt{1 + x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \quad (0 \leqslant x \leqslant 1).$$

74. Oblicz granice

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^{\frac{-x^2}{2}}}{x^4}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x \sin x - x(1 + x)}{x^3}, \qquad \lim_{x\to\infty} x^{3/2} \left(\sqrt{x + 1} + \sqrt{x - 1} - 2\sqrt{x}\right),$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sinh(\operatorname{tg} x) - x}{x^3}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1 - (\cos x)^{\sin x}}{x^3}, \qquad \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right).$$

75. Rozwiń w szereg Maclaurina funkcje $\sin x \cos x$, $\sin^2 x$, $\cosh^2 x$.

76. Rozwiń w szereg Maclaurina funkcje arshx i $\arccos x$.

77. Pokaż, że $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{-1/2}{k} = \frac{\pi}{2}$.

78. Niech $f : (a,b) \to \boldsymbol{R}$ będzie funkcją wypukłą. Udowodnij przez indukcję *nierówność Jensena*

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$$

dla $x_j \in (a,b)$ i $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$, $\lambda_j \geqslant 0$.

79. Wykaż, że funkcja $\sin : [\pi, 2\pi] \to \boldsymbol{R}$ jest wypukła, a funkcja $(0,\infty) \ni x \mapsto \sqrt{x}$ jest wklęsła.

80. Udowodnij ponownie nierówność $ab \leqslant \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$, gdzie $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ i $p, q > 0$, korzystając z tego, że *logarytm* jest funkcją ściśle wklęsłą.

81. Udowodnij nierówność

$$\sqrt[n]{|\sin a_1 \sin a_2 \ldots \sin a_n|} \leqslant \sin\{\frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \ldots a_n)\}$$

dla $a_j \geqslant 0$.

82. Znajdź przedziały ścisłej wypukłości i wklęsłości oraz punkty przegięcia funkcji $f(x) = x^\alpha \log x$ w zależności od $\alpha \in \boldsymbol{R}$.

83. Udowodnij nierówność $x \log x + y \log y \geqslant (x+y) \log \frac{x+y}{2}$, $x > 0$, $y > 0$.

84. Wykaż, że funkcja różniczkowalna $f : (a,b) \to \boldsymbol{R}$ jest wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy $f(x) \geqslant f(y) + f'(y)(x-y)$ dla $x, y \in (a,b)$ i podaj interpretację geometryczną tego warunku.

85. Wykaż, że funkcja $f : (a,b) \to \boldsymbol{R}$ jest ściśle wypukła, wtedy i tylko wtedy gdy dla każdych $x < y < z$ z odcinka (a,b)

$$\begin{vmatrix} 1 & x & f(x) \\ 1 & y & f(y) \\ 1 & z & f(z) \end{vmatrix} > 0.$$

86. Funkcja $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ jest ściśle wypukła i nie jest monotoniczna. Udowodnij, że $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = \infty$, a następnie pokaż, że f przyjmuje wartość minimalną. Rozważ funkcje e^x, e^{-x} i $\cosh x$.

87. Niech $f : I \to \boldsymbol{R}$ będzie funkcją wypukłą. Czy a) $|f|$, b) $\sqrt{|f|}$, c) f^2, d) $e^{|f|}$, e) $\log(1+|f|)$, f) $\frac{1}{|f|}$ jest funkcją wypukłą?

88. Znajdź punkty przegięcia funkcji: $y = 3x^2 - x^3$, $y = x + \sin x$, $y = e^{-x^2}$, $y = \log(1+x^2)$, $y = \sqrt{1+x^2}$, $y = x^x$.

89. Pokaż, że wykres funkcji $y = \frac{x+1}{x^2+1}$ ma trzy punkty przegięcia leżące na tej samej prostej.

90. Funkcja $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ jest jednocześnie wklęsła i wypukła. Udowodnij, że f jest funkcją afiniczną, tj. $f(x) = ax + b$ dla pewnych $a, b \in \boldsymbol{R}$.

91. Niech $f : [a,b] \to \boldsymbol{R}$ będzie funkcją monotoniczną. Pokaż, że f ma wszędzie granice jednostronne.

92. Wykaż, że funkcja wypukła ma granice jednostronne (właściwe lub nie) na końcach swojej dziedziny I.

93. Funkcja $f : (a,b) \to \boldsymbol{R}$ jest rosnąca (wypukła), ale nie ściśle rosnąca (wypukła). Pokaż, że na pewnym odcinku $[c,d] \subset (a,b)$ jest stała (liniowa).

94. Pokaż, że funkcja $\operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$ jest odwracalna na całej prostej. Znajdź funkcje pochodne funkcji tgh i jej odwrotnej.

95. Znajdź punkty przegięcia funkcji a) $f(x) = [x] + \sin \pi x$, b) $g(x) = [x] \sin \pi x$.

96. Niech $f : [a,b] \to \boldsymbol{R}$ będzie funkcją wypukłą. Pokaż, że istnieje $c \in [a,b]$, takie że f jest malejąca na $[a,c]$ i rosnąca na $[c,b]$. W szczególności, gdy $c = a$, f jest malejąca, a gdy $c = b$ – rosnąca na całej swej dziedzinie.

97. Pokaż, że funkcja wypukła (wklęsła) na odcinku domkniętym osiąga swoją największą (najmniejszą) wartość na jednym z końców przedziału.

98. Niech $f : I \to \boldsymbol{R}$ będzie funkcją wypukłą. Dla $a, b \in I$ niech $g = g_{a,b}$ oznacza funkcj afiniczną, taką że $g(a) = f(a)$ i $g(b) = f(b)$. Pokaż, że jeśli $x \in I \setminus (a, b)$, to $g(x) \leqslant f(x)$. Zinterpretuj tę własność geometrycznie.

99. Niech $f : [a, b] \to \boldsymbol{R}$ będzie wypukła. Niech $c \in (a, b)$. Definiujemy dwie nowe funkcje: $G = g_{a,b}$ i $g = \min\{g_{a,c}, g_{c,b}\}$. Korzystając z poprzedniego zadania, wykaż, że $g \leqslant f \leqslant G$. Wywnioskuj stąd, że f jest ograniczona.