8. Jednostajność

Mówimy, że funkcja $f : I \to \boldsymbol{R}$ spełnia *warunek Lipschitza* ze stałą $C > 0$, jeśli

$$|f(x) - f(y)| \leqslant C|x - y|, \qquad x, y \in I.$$

8.1. Przykład. a) Taką funkcją jest np. $\sin : \boldsymbol{R} \to [-1, 1]$. Rzeczywiście,

$$\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2},$$

więc

$$|\sin x - \sin y| \leqslant 2 \left| \sin \frac{x-y}{2} \right| \leqslant |x - y|.$$

Stała Lipschitza wynosi $C = 1$.

b) Niech teraz $f : [1, \infty) \to \boldsymbol{R}$ będzie zadana wzorem $f(x) = 1/x$. Mamy

$$|f(x) - f(y)| = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| = \left| \frac{y-x}{xy} \right| \leqslant |x - y|,$$

więc f jest także lipschitzowska ze stałą $C = 1$.

8.2. Twierdzenie. *Funkcja $f : I \to \boldsymbol{R}$ spełniająca warunek Lipschitza jest ciągła w każdym punkcie.*

Dowód. Rzeczywiście, jeśli $I \ni x_n \to x_0 \in I$, to

$$|f(x_n) - f(x_0)| \leqslant C|x_n - x_0| \to 0,$$

więc $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. □

Niech będzie dana funkcja $f : I \to \boldsymbol{R}$. Warunek Lipschitza można wyrazić też tak: Istnieje stała $C > 0$, taka że dla wszelkich $x, y \in I$, $x \neq y$,

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leqslant C.$$

Innymi słowy, funkcja lipschitzowska, to funkcja o ograniczonych *ilorazach różnicowych*, a optymalną stałą Lipschitza jest

$$C = \sup_{x \neq y} \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right|.$$

8.3 (Kryterium). *Jeśli $f : (a, b) \to \boldsymbol{R}$ ma ograniczoną pochodną, to spełnia warunek Lipschitza.*

Są i nieróżniczkowalne funkcje, które spełniają warunek Lipschitza.

8.4. Twierdzenie. *Jeśli $f : (a, b) \to \boldsymbol{R}$ jest wypukła, to spałnia warunek Lipschitza na każdym przedziale $[c, d] \subset (a, b)$. W szczególności, f jest ciągła na całym przedziale (a, b).*

Dowód. Rzeczywiście, niech $a < c_1 < c$ i $d < d_1 < b$. Skoro f jest wypukła, jej ilorazy różnicowe są rosnące, a zatem

$$\frac{f(c_1) - f(c)}{c_1 - c} \leqslant \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leqslant \frac{f(d_1) - f(d)}{d_1 - d}$$

dla każdych $x, y \in [c, d]$. Widzimy więc, że f ma ograniczone ilorazy różnicowe. □

Przypomnijmy sobie, że funkcja $f : I \to \boldsymbol{R}$ jest ciągła, jeśli jest ciągła w każdym punkcie $x \in I$, czyli

$$\forall x \in I \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall y \in I \quad \Big(|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon \Big).$$

Mówimy, że $f : I \to \boldsymbol{R}$ jest *jednostajnie ciągła*, jeśli

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x, y \in I \quad \Big(|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon \Big).$$

Cóż oznacza to przestawienie kwantyfikatorów? Po pierwsze, jak widać, warunek jednostajnej ciągłości jest silniejszy od warunku ciągłości. Zauważmy też, że istotna jest zamiana $\forall x \exists \delta$ na $\exists \delta \forall x$, która mówi, że teraz δ jest niezależna od x, a więc wspólna dla wszystkich $x \in I$. Prześledźmy to na przykładzie.

8.5. Przykład. Funkcja

$$f(x) = \frac{1}{x}, \qquad x \in (0, 1),$$

jest przykładem funkcji ciągłej, ale nie jednostajnie ciągłej. Rzeczywiście, kładąc $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = \frac{1}{n+1}$, mamy

$$x_n - y_n = \frac{1}{n(n+1)}, \quad \text{i} \quad f(x_n) - f(y_n) = -1,$$

a więc $|f(x_n) - f(y_n)| \geqslant 1 = \varepsilon$, choć $x_n - y_n \to 0$. Jak widać, dla każdej $\delta > 0$ i dostatecznie dużych $n \in \boldsymbol{N}$, mamy

$$|x_n - y_n| < \delta \text{ i } |f(x_n) - f(y_n)| \geqslant 1,$$

co przeczy warunkowi jednostajnej ciągłości.

Zatem

8.6. *Każda funkcja jednostajnie ciągła jest ciągła, ale istnieją funkcje ciągłe, które nie są jednostajnie ciągłe.*

Przytoczony przykład sugeruje nową wersję definicji, tym razem w duchu Heinego.

8.7. *Funkcja $f : I \to \boldsymbol{R}$ jest jednostajnie ciągła, jeśli dla dowolnych ciągów $\{x_n\}$, $\{y_n\} \subset I$, takich że $x_n - y_n \to 0$, jest*

$$f(x_n) - f(y_n) \to 0, \qquad n \to \infty.$$

8.8. *Uwaga.* Każda funkcja lipschitzowska $f : I \to \boldsymbol{R}$ jest jednostajnie ciągła, co wynika wprost z oszacowania

$$|f(x_n) - f(y_n)| \leqslant C|x_n - y_n|, \qquad x_n, y_n \in I.$$

8.9. *Jeśli $f : (a, b) \to \boldsymbol{R}$ ma ograniczoną pochodną, to jest jednostajnie ciągła.*

8.10. Twierdzenie. *Funkcja ciągła na odcinku domkniętym jest jednostajnie ciągła.*

Dowód. Przypuśćmy nie wprost, że funkcja ciągła $f : [a, b] \to \boldsymbol{R}$ nie jest jednostajnie ciągła. Istnieje wtedy $\varepsilon > 0$ i istnieją ciągi o wyrazach $x_n, y_n \in [a, b]$, takie że

$$x_n - y_n \to 0, \quad \text{ale} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \varepsilon.$$

Na mocy twierdzenia Bolzano-Weierstrassa z ciągu $\{y_n\}$ możemy wybrać podciąg $\{y_{n_k}\}$ zbieżny do pewnego $x_0 \in [a, b]$. Oczywiście wtedy także $x_{n_k} \to x_0$, więc wobec ciągłości funkcji f

$$f(x_{n_k}) \to f(x_0), \qquad f(y_{n_k}) \to f(x_0),$$

a to przeczy naszemu założeniu $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geqslant \varepsilon > 0$. $\square$

Przechodzimy do kwestii zbieżności ciągów funkcyjnych. Niech będzie dany ciąg funkcji $f_n : D \to \boldsymbol{R}$ o wspólnej dziedzinie D. Mówimy, że ciąg ten jest *zbieżny punktowo* do funkcji $f : D \to \boldsymbol{R}$, jeśli dla każdego $x \in D$

$$f_n(x) \to f(x).$$

W definicji tej nie ma nic nowego. Przypomnijmy chociażby doskonale nam znany wzór

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

który oznacza zbieżność punktową ciągu funkcji

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

do funkcji $f(x) = e^x$.

8.11. Przykład. Niech

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}, \qquad x > 0.$$

Jak łatwo zauważyć, ciąg ten jest zbieżny punktowo do funkcji

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < 1; \\ \frac{1}{2}, & x = 1; \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Dla funkcji $f : D \to \boldsymbol{R}$ niech

$$\|f\| = \sup_{x \in D} |f(x)|.$$

A oto zapowiedziana definicja *jednostajnej zbieżności*. Ciąg funkcyjny $f_n : D \to \boldsymbol{R}$ jest *zbieżny jednostajnie* do $f : D \to \boldsymbol{R}$, jeśli

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{N \in \boldsymbol{N}}\ \forall_{n \geqslant N}\ \|f_n - f\| < \varepsilon,$$

co zapisujemy za pomocą podwójnej strzałki:

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x), \qquad x \in D.$$

8.12. *Uwaga.* Ciąg funkcyjny $f_n : D \to \boldsymbol{R}$ jest *zbieżny jednostajnie* wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia jednostajny warunek Cauchy'ego:

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{N \in \boldsymbol{N}}\ \forall_{n,m \geqslant N}\ \|f_n - f_m\| < \varepsilon.$$

8.13. *Uwaga.* Jeśli $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ na D, to dla każdego $x \in D$ jest $f_n(x) \to f(x)$. Zatem zbieżność jednostajna oznacza coś więcej niż zbieżność punktowa.

8.14 (Kryterium). *Ciąg f_n nie jest zbieżny jednostajnie do 0 wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg $\{x_n\} \subset D$, taki że ciąg $\{f_n(x_n)\}$ nie jest zbieżny do* 0.

8.15. Przykład. Niech $f_n(x) = x^n$ dla $0 \leqslant x < 1$. Zauważmy, że

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = 0$$

dla każdego x z osobna, ale

$$\|f_n\| = \sup_{x \in [0,1)} x^n = 1$$

dla każdego n. Zatem ciąg $\{f_n\}$ jest zbieżny punktowo, ale nie jednostajnie, do funkcji zerowej. Zauważmy jeszcze, że jeśli $x_n = 1 - \frac{1}{n}$, to

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x_n) = \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e} \neq 0.$$

8.16. Przykład. Niech teraz

$$f_n(x) = x^n - x^{n+1}, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Dla dowolnego $\varepsilon > 0$ dobieramy N tak, by $(1-\varepsilon)^N < \varepsilon$. Wystarczy więc wziąć

$$N > \frac{\log \varepsilon}{\log(1-\varepsilon)}.$$

Wtedy

$$f_n(x) = x^n(1-x) < (1-\varepsilon)^n < \varepsilon, \qquad 0 \leqslant x \leqslant (1-\varepsilon),$$

oraz

$$f_n(x) = x^n(1-x) < (1-x) < \varepsilon, \qquad 1-\varepsilon < x \leqslant 1,$$

skąd $\|f_n\| < \varepsilon$ dla $n \geqslant N$. Zatem $f_n \rightrightarrows 0$.

8.17. Przykład. Niech

$$f_n(x) = \frac{1}{1+nx^2}, \qquad x \in \boldsymbol{R}.$$

Ten ciąg jest zbieżny punktowo do funkcji zerowej, ale dla każdego $n \in \boldsymbol{N}$

$$\|f_n\| = \sup_{x \in \boldsymbol{R}} |f_n(x)| = 1,$$

więc nie ma mowy o zbieżności jednostajnej.

Rozważmy jednak ciąg zadany tym samym wzorem na mniejszej dziedzinie

$$g_n(x) = \frac{1}{1+nx^2}, \qquad |x| \geqslant 1.$$

Tutaj

$$\|g_n\| = \sup_{|x| \geqslant 1} \frac{1}{1+nx^2} = \frac{1}{1+n},$$

więc $g_n \rightrightarrows 0$.

8.18. Twierdzenie. *Granica f jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji f_n na I jest ciągła w każdym punkcie $x_0 \in I$, w którym wszystkie funkcje f_n są ciągłe.*

Dowód. Przypuśćmy, że wszystkie funkcje f_n są ciągłe w x_0 i $f_n \rightrightarrows f$. Wtedy dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $N \in \boldsymbol{N}$, takie że $\|f_N - f\| < \varepsilon$. Funkcja f_N jest ciągła w x_0, więc istnieje $\delta > 0$, taka że $|f_N(x) - f_N(x_0)| < \varepsilon$ dla $|x - x_0| < \delta$. Zatem

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leqslant |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| \\ &< \|f - f_N\| + \varepsilon < 2\varepsilon, \end{aligned}$$

jeśli tylko $|x - x_0| < \delta$. □

Oznaczmy zbiór wszystkich funkcji ciągłych na odcinku $I \subset \boldsymbol{R}$ przez $C(I)$.

8.19. Wniosek. *Jeśli $f_n \in C([a,b])$ i $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$, to $f \in C([a,b]$.*

8.20. Twierdzenie (Dini). *Jeśli monotoniczny ciąg funkcji ciągłych f_n na przedziale domkniętym $[a,b]$ jest zbieżny punktowo do funkcji ciągłej f, to jest zbieżny jednostajnie.*

Dowód. Przechodząc do ciągu $g_n = |f - f_n|$, redukujemy zagadnienie do sytuacji, gdy g_n są ciągłe, nieujemne i dążą monotonicznie do funkcji zerowej.

Przypuśćmy, że ten ciąg nie jest jednostajnie zbieżny. Wtedy istnieją $\varepsilon > 0$ i ciąg $[a,b] \ni x_k \to x_0$, taki że $g_{n_k}(x_k) \geqslant \varepsilon$ dla odpowiedniego podciągu funkcji. Ustalmy dowolne m. Wtedy

$$g_m(x_0) = \lim_{k \to \infty} g_m(x_k) \geqslant g_{n_k}(x_k) \geqslant \varepsilon,$$

dla $n_k \geqslant m$, co stoi w sprzeczności ze zbieżnością punktową $g_m(x_0) \to 0$. □

Często dzieje się tak, że zbieżność jednostajna zachodzi nie na całej dziedzinie określoności funkcji będących wyrazami ciągu lub szeregu, ale na każdym przedziale domkniętym zawartym w tej dziedzinie. Wtedy mówimy, że ciąg czy też szereg jest zbieżny *niemal jednostajnie.*

8.21. Przykład. Rozważmy ciąg $x_n \to x_0$ i zdefiniujmy ciąg funkcji

$$f_n(t) = t^{x_n}, \qquad t > 0.$$

Nietrudno zauważyć, że dla $1 \leqslant t \leqslant b$ zachodzi następująca nierówność

$$|f_n(t) - f_0(t)| \leqslant eb^b \log b |x - x_0|,$$

skąd wnosimy, że $f_n \rightrightarrows f_0$ na $[a, b]$. Ze względu na dowolność a i b oznacza to niemal jednostajną bieżność na $[1, \infty)$.

Podobnie dla $0 < a \leqslant t \leqslant 1$ mamy

$$|f_n(t) - f_0(t)| \leqslant e|\log a||x - x_0|,$$

skąd wnosimy, że $f_n \to f$ niemal jednostajnie na $(0, 1]$.

Podsumowując widzimy, że nasz ciąg jest niemal jednostajnie zbieżny do f_0 na $(0, \infty)$.

8.22. *Niech będzie dany ciąg funkcji ciągłych f_n na przedziale I. Jeśli f_n jest zbieżny niemal jednostajnie do funkcji f, to f jest ciągła.*

Mówimy, że funkcja $f : (a, b) \to \boldsymbol{R}$ jest *różniczkowalna w sposób ciągły*, jeśli f jest różniczkowalna i f' jest ciągła na (a, b).

8.23. Twierdzenie. *Niech będzie dany ciąg funkcji $f_n : (a, b) \to \boldsymbol{R}$ różniczkowalnych w sposób ciągły. Jeśli $f_n \to f$ i $f_n' \rightrightarrows g$, to f jest funkcją rózniczkowalną i $f' = g$.*

Dowód. Zauważmy najpierw, że funkcja g jako granica jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji ciągłych jest ciągła. Niech $x \in (a, b)$. Niech $\varepsilon > 0$. Korzystając z twierdzenia Lagrange'a, mamy

$$\begin{aligned} \left| \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} - g(x) \right| &= |f_n'(x + \theta h) - g(x)| \\ &\leqslant |f_n'(x + \theta h) - g(x + \theta h)| + |g(x + \theta h) - g(x)| < 2\varepsilon \end{aligned}$$

dla dostatecznie dużych n i dostatecznie małych $|h|$, co wynika z jednostajnej zbieżności ciągu (f_n') i ciągłości funkcji g. Przechodząc z n do nieskończoności, otrzymujemy

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - g(x) \right| < 2\varepsilon$$

dla dostatecznie małych $|h|$, co dowodzi naszej tezy. □

Niech $f_n : D \to \boldsymbol{R}$. Mówimy, że szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest *jednostajnie zbieżny* na D, jeśli ciąg funkcyjny jego sum częściowych $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ jest zbieżny jednostajnie na D.

8.24. Wniosek. *Niech będzie dany ciąg funkcji $f_n : (a, b) \to \boldsymbol{R}$ różniczkowalnych w sposób ciągły. Jeśli szereg $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest zbieżny punktowo, a szereg $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ jednostajnie, to funkcja f jest różniczkowalna i $f'(x) = g(x)$ dla $x \in (a, b)$.*

Mówimy, że szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty}$ ma *zbieżną liczbową majorantę*, jeżeli istnieje szereg liczbowy o nieujemnych wyrazach, taki że

$$|f_n(x)| \leqslant a_n \qquad \text{oraz} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty.$$

8.25 (Weierstrass). *Niech $f_n : D \to \boldsymbol{R}$. Jeśli szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ ma zbieżną liczbową majorantę, to jest zbieżny bezwzględnie jednostajnie.*

Dowód. Niech $\varepsilon > 0$ i niech

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |f_k(x)|.$$

Dla $m > n$ mamy

$$|S_m(x) - S_n(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} |f_k(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} a_n < \varepsilon,$$

dla n dostatecznie dużych i wszystkich x, co wynika ze zbieżności majoranty. □

8.26. *Szereg potęgowy jest zbieżny niemal jednostajnie w swoim otwartym przedziale zbieżności.*

Dowód. Zauważmy, że jeśli $x \in [-\rho, \rho] \subset (-r, r)$, gdzie $r > 0$ jest promieniem zbieżności szeregu, to

$$|a_n x^n| \leqslant |a_n|\rho^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\rho^n < \infty,$$

więc szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, gdzie $a_n = |a_n|\rho^n$ jest zbieżną liczbową majorantą. □

8.27. *Uwaga.* Zauważmy, że wyrazy szeregu potęgowego są wielomianami, a więc funkcjami ciągłymi. Otrzymujemy więc nowy dowód ciągłości funkcji zadanej szeregiem potęgowym wewnątrz przedziału jego zbieżności.

Znane nam kryteria Dirichleta i Abela dotyczące zbieżności szeregów maja swoje jednostajne odpowiedniki.

8.28. Twierdzenie (jednostajne kryterium Dirichleta). *Jeżeli $f_k : I \to \boldsymbol{R}$ jest monotonicznym ciągiem funkcyjnym zbieżnym jednostajnie do zera, a ciąg sum częściowych ciągu funkcyjnego $g_k : I \to \boldsymbol{R}$ jest jednostajnie ograniczony, to szereg $\sum_{k=1}^{\infty} f_k g_k$ jest jednostajnie zbieżny.*

Dowód. Ciąg (f_k) jako zbieżny jednostajnie jest jednostajnie ograniczony. Bez straty ogólności możemy więc przyjąć, że jest malejący i $f_k \geqslant 0$. Oznaczmy

$$G_n = \sum_{k=1}^{n-1} g_k, \qquad n \geqslant 1$$

i niech $\|G_k\| \leqslant C$. Na mocy nierówności Abela

$$|\sum_{k=1}^{n} f_k(x) g_k(x)| = |\sum_{k=0}^{n} f_k(x) G_k(x)'| \leqslant 2C\|f_m\|.$$

Jako że $\|f_m\| \to 0$, nasz wyjściowy szereg spełnia jednostajne kryterium Cauchy'ego, a więc jest jednostajnie zbieżny. □

Czytelnik na pewno się zorientował, że

$$G_k(x)' = G_{k+1}(x) - G_k(x)$$

i nie ma nic wspólnego z pochodną funkcji G_k, która wcale nie musi być różniczkowalna, ani nawet ciągła.

8.29. Przykład. Niech $\{f_k\}$ będzie ciągiem funkcyjnym jednostajnie malejącym do zera i niech $g_k(x) = \sin kx$. Załóżmy, że oba ciągi są określone na przedziale $[\delta, 2\pi - \delta]$, gdzie $0 < \delta < \pi$. Dla każdego n

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} g_k(x)\Big| \leqslant \Big|\frac{\sin\frac{n}{2}x \cdot \sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x}\Big| \leqslant \frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}},$$

więc sumy częściowe ciągu $\{g_k\}$ są jednostajnie ograniczone. Na mocy twierdzenia Dirichleta szereg

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \sin kx$$

jest więc jednostajnie zbieżny. W szczególności, szereg

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$$

jest jednostajnie zbieżny dla $\delta \leqslant x \leqslant 2\pi - \delta$.

Zaniepokojony Czytelnik mógłby jednak zapytać, czy sumy $\sum_{k=1}^{n} g_k(x)$ nie są przypadkiem jednostajnie ograniczone dla wszystkich $x \in [0, 2\pi]$. Nasze ograniczenie do przedziału $[\delta, 2\pi - \delta]$ może przecież być rezultatem niedostatecznie dobrego szacowania. Tak jednak nie jest. Aby się o tym przekonać, podstawmy do naszej sumy wartości ciągu $x_n = \pi/n$. Wtedy

$$\sum_{k=1}^{n} g_k(x_n) = \frac{\sin \frac{(n+1)\pi}{2n}}{\sin \pi/2n} \geqslant \frac{\sin \pi/3}{\sin \pi/2n} \geqslant n/\pi$$

a więc

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0\leqslant x\leqslant \pi/2} \sum_{k=1}^{n} g_k(x) = \infty.$$

Widać tu bardzo wyraźnie, że jednostajna ograniczoność jest ograniczonością ze względu na dwie zmienne n oraz x.

8.30. Twierdzenie (jednostajne kryterium Abela). *Jeżeli $f_k : I \to \boldsymbol{R}$ jest jednostajnie ograniczonym monotonicznym ciągiem funkcyjnym, a ciąg sum częściowych ciągu funkcyjnego $g_k : I \to \boldsymbol{R}$ jest jednostajnie zbieżny, to szereg $\sum_{k=1}^{\infty} f_k g_k$ jest jednostajnie zbieżny.*

Dowód. Jak wyżej możemy przyjąć, że ciąg (f_k) jest malejący, $f_k \geqslant 0$ i $\|f_k\| \leqslant C$. Oznaczmy

$$G_n = \sum_{k=1}^{n-1} g_k, \qquad G = \sum_{k=1}^{\infty} g_k, \qquad H_n = G_n - G.$$

Jak widać, $H_n \rightrightarrows 0$ i $G'_k = H'_k$. Niech $\varepsilon > 0$. Na mocy nierówności Abela

$$|\sum_{k=m}^{n} f_k(x) g_k(x)| = |\sum_{k=m}^{n} f_k(x) H_k(x)'| \leqslant 2C \sup_{k\geqslant m} \|H_k\| < \varepsilon$$

dla dostatecznie dużych m, bo $H_k \rightrightarrows 0$. Nasz wyjściowy szereg spełnia zatem jednostajne kryterium Cauchy'ego, więc jest jednostajnie zbieżny.

$\square$

Wiemy, że funkcja różniczkowalna w danym punkcie jest też w tym punkcie ciągła. Łatwo podać przykład funkcji ciągłej, ale nieróżniczkowalnej w izolowanych punktach. Taką funkcją jest np.

$$u(x) = \operatorname{dist}(x, \boldsymbol{Z}).$$

Jest to funkcja ciągła (kawałkami liniowa) na całej prostej, ale nieróżniczkowalna w punktach $x_n = \frac{n}{2}$. Okazuje się, że istnieją funkcje ciągłe, które nie mają *nigdzie* pochodnej.

8.31 (van der Waerden). *Niech*

$$u_k(x) = 4^{-k} u(4^k x)$$

dla $k \in \boldsymbol{N} \cup \{0\}$. Funkcja zadana szeregiem

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x), \qquad x \in \boldsymbol{R}, \tag{8.32}$$

jest ciągła. Nie jest jednak różniczkowalna w żadnym punkcie.

To, że funkcja f zdefiniowana szeregiem (8.32) jest ciągła wynika z istnienia zbieżnej majoranty liczbowej. Trudniej jest pokazać, że f nie jest nigdzie różniczkowalna i nie będziemy tego tu robić. Pierwszy przykład funkcji ciągłej i nigdzie nie różniczkowalnej pochodzi od Weierstrassa i jest dość skomplikowany. Przykład van der Waerdena korzysta z tego samego pomysłu, ale jest znacznie prostszy technicznie. Na cześć autora pomysłu skonstruowaną wyżej funkcję nazywa się czasem *piłą Weierstrassa.*

Obecnie rozważymy zagadnienie jednostajnego przybliżania funkcji ciągłej wielomianami. Widzieliśmy już cześniej, że każdą funkcję zdaną szeregiem potęgowym można jednostajnie aproksymować ciągiem wielominów będących sumami częściowymi szeregu na każdym domkniętym odcinku zawartym w otwartym przedziale zbieżności. Okazuje się, że można udowodnić znacznie więcej.

Niech będzie dana funkcja $f : [0, 1] \to \boldsymbol{R}$. Aby udowodnić następne twierdzenie wprowadza się rodzinę wielomianów ściśle związanych z funkcją f:

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f(\frac{k}{n}) x^k (1-x)^{n-k},$$

które nazywamy *wielomianami Bernsteina.*

8.33. Przykład. Proste rachunki pokazują, że w przypadku, gdy $f = 1$, mamy

$$B_n(x) = 1, \qquad n \in \boldsymbol{N}.$$

Gdy $f(x) = x$, otrzymujemy

$$B_n(x) = x, \qquad n \in \boldsymbol{N}.$$

Wreszcie dla funkcji kwadratowej $f(x) = x^2$ wielomianami Bernsteina są

$$B_n(x) = \frac{n-1}{n} x^2 + \frac{1}{n} x, \qquad n \in \boldsymbol{N}.$$

8.34. Twierdzenie (Weierstrass). *Każda funkcja ciągła na przedziale domkniętym* $[0, 1]$ *jest jednostajną granicą ciągu wielomianów.*

Dowód. Niech $\varepsilon > 0$. Ponieważ f jest jednostajnie ciągła, więc dla pewnej $\delta > 0$

$$\left| f(x) - f\Big(\frac{k}{n}\Big) \right| < \varepsilon,$$

o ile $|\frac{k}{n} - x| < \delta$. Dla pozostałych k

$$\left| f(x) - f\Big(\frac{k}{n}\Big) \right| \leqslant 2\|f\| \leqslant \frac{2\|f\|(x - \frac{k}{n})^2}{\delta^2}.$$

Zatem

$$\begin{aligned} |f(x) - B_n(x)| &= \Big| \sum_{k=0}^{n} \Big[f(x) - f\Big(\frac{k}{n}\Big) \Big] x^k (1-x)^{n-k} \Big| \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Big(\varepsilon + \frac{2\|f\|(x - \frac{k}{n})^2}{\delta^2} \Big) x^k (1-x)^{n-k} \\ &\leqslant \varepsilon + \frac{2\|f\|}{\delta^2} \sum_{k=0}^{n} \Big(x - \frac{k}{n} \Big)^2 x^k (1-x)^{n-k} \end{aligned}$$

Ale

$$\sum_{k=0}^{n}(x-\frac{k}{n})^2x^k(1-x)^{n-k} = x^2-2x^2+\frac{n-1}{n}x^2+\frac{1}{n}x$$
$$=\frac{x(1-x)}{n}\leqslant\frac{1}{n},$$

co dowodzi naszego twierdzenia. □

8.35. *Uwaga.* Twierdzenie Weierstrassa łatwo uogólnia się na dowolny przedział $[a,b]$. Istotnie, jeśli $f\in C([a,b])$, to

$$\varphi(t)=f(a+t(b-a)),\qquad f(x)=\varphi\Big(\frac{x-a}{b-a}\Big),$$

jest funkcją ciągłą na $[0,1]$. Niech B_n będzie ciągiem wielomianów Bernsteina funkcji φ. Wtedy

$$\beta_n(x)=B_n\Big(\frac{x-a}{b-a}\Big)\rightrightarrows f(x).$$

Uważny Czytelnik zauważył być może, że szereg twierdzeń niniejszego rozdziału ma charakter kryterium pozwalającego dokonać zamiany kolejności pewnych przejść granicznych. Na zakończenie rozdziału postaramy się wyjaśnić, dlaczego w tych twierdzeniach decydującą rolę odgrywa zbieżność jednostajna.

8.36. Twierdzenie (zmiana kolejności przejść granicznych). *Niech dla każdego $n\in\boldsymbol{N}$ istnieje granica*

$$\lim_{m\to\infty}a(m,n)=A(n)$$

i dla każdego $m\in\boldsymbol{N}$ granica

$$\lim_{n\to\infty}a(m,n)=B(m).$$

Jeśli przynajmniej jedna z tych granic jest jednostajna względem niezwiązanego indeksu, to istnieją obie granice iterowane i są sobie równe:

$$\lim_{n\to\infty}A(n)=\lim_{m\to\infty}B(m).$$

Dowód. Przypuśćmy, że $a(m,n)\rightrightarrows B(m)$, gdy $n\to\infty$. Niech $\lim_{m\to\infty}B(m)=B$. Wtedy dla $\varepsilon>0$ istnieje $N\in\boldsymbol{N}$, takie że

$$|a(m,n)-B(m)|\leqslant\varepsilon,\qquad n\geqslant N, m\in\boldsymbol{N},$$

co po przejściu do granicy względem m daje

$$|A(n)-B|\leqslant\varepsilon,\qquad n\geqslant N.$$

Zatem ciąg $\lim_{n\to\infty}A(n)=B$, a oto właśnie nam chodziło. □

8.37. Wniosek. *Niech będzie dany ciąg podwójny $\alpha_{m,n}$. Jeżeli szeregi $\sum_{m=0}^{\infty}\alpha_{m,n}$ i $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_{m,n}$ są zbieżne i przynajmniej jeden z nich jest zbieżny jednostajnie względem niezwiązanego indeksu, to*

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_{m,n}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\alpha_{m,n}.$$

8.38. Wniosek. *Niech będzie dana funkcja $f:(a,b)\times(c,d)\to\boldsymbol{R}$ i niech $(x_0,y_0)\in[a,b]\times[c,d]$. Jeśli istnieją granice $\lim_{x\to x_0}f(x,y)$ i $\lim_{y\to y_0}f(x,y)$ i przynajmniej jedna z nich jest jednostajna względem niezwiązanej zmiennej, to istnieją obie granice iterowane i są sobie równe:*

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0}f(x,y)=\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0}f(x,y).$$

Dowód. Zgodnie z definicją Heine'go nasze założenia oznaczają, że dla każdego ciągu $x_n \to x_0$ i każdego ciągu $y_m \to y_0$ istnieją granice

$$\lim_{m\to\infty} f(x_n, y_m) = \varphi(x_n), \qquad \lim_{n\to\infty} f(x_n, y_m) = \psi(y_m)$$

i jedna z tych granic jest jednostajna względem niezwiązanego indeksu. Zatem na mocy twierdzenia o zmianie kolejności przejść granicznych

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \lim_{m\to\infty} \psi(y_m).$$

co wobec dowolności ciągów pociąga tezę. □

8.39. Przykład. Niech będzie dany szereg potęgowy

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad |x| < r,$$

gdzie $r > 0$ jest promieniem zbieżności. Ustalmy $x_0 \in (-r, r)$. Niech $|x_0| < \rho < r$. Jak wiemy, szereg f jest jednostajnie zbieżny na odcinku $[-\rho, \rho]$, więc

$$\lim_{x\to x_0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n,$$

co daje jeszcze jedno uzasadnienie ciągłości szeregu potęgowego wewnątrz przedziału zbieżności.

Zadania

1. Pokaż, że funkcje

$$[1,\infty) \ni x \to \log x, \qquad [a,b] \ni x \to |x|^{\alpha}, \qquad [1,\infty) \ni x \to (1+1/x)^{x},$$

gdzie $\alpha \geqslant 1$, są lipschitzowskie.

2. Pokaż, że dla każdego $a \in \boldsymbol{R}$ funkcja wykładnicza $(-\infty, a] \ni x \mapsto e^{x} \in \boldsymbol{R}$ spełnia warunek Lipschitza ze stałą $C = e^{a}$.

3. Niech $f : (a,b) \to \boldsymbol{R}$ bedzie wypukła. Udowodnij, że na każdym przedziale $[c,d] \subset (a,b)$ funkcja f spełnia warunek Lipschitza. Wywnioskuj stąd, że a) funkcja wypukła na przedziale otwartym jest ciągła, b) funkcja wypukła na przedziale domkniętym może mieć nieciągłości tylko na końcach przedziału. Podaj stosowny przykład.

4. Udowodnij, że jeśli $f : \boldsymbol{R} \to [0,\infty)$ jest parzystą funkcją podaddytywną, to

$$|f(x) - f(y)| \leqslant f(x-y), \qquad x, y \in \boldsymbol{R}.$$

5. Pokaż, że funkcja $x \to |x|^{\alpha}$, gdzie $0 < \alpha \leqslant 1$, jest lipschitzowska na przedziale $[1,\infty)$.

6. Rozważmy funkcję $f(x) = x^{\alpha}$ dla $\alpha > 1$. Pokaż, że jest ona lipschitzowska na przedziale $[0,1]$.

7. Sprawdź, że funkcja $x \to x^{x}$ na przedziale $(0,1)$ jest podaddytywna.

8. Oznaczmy przez $\mathrm{d}(x)$ odległość liczby $x \in \boldsymbol{R}$ od najbliższej liczby całkowitej. Pokaż, że $\mathrm{d}(x) = \min\{\mathbf{m}(x), \mathbf{m}(-x)\}$ oraz że $x \to \mathrm{d}(x)$ spełnia warunek Lipschitza ze stałą $C = 1$.

9. Przypomnij dowód równoważności definicji ciągłości Cauchy'ego i Heinego i zaadaptuj go do przypadku jednostajnej ciągłości.

10. Oblicz

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(2^{n} + x^{n})}{n}, \qquad x > 0.$$

11. Dana jest ciągła funkcjia $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$. Pokaż, że f jest jednostajnie ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu $x_n \to 0$ ciąg funkcyjny $f_n(x) = f(x_n + x)$ jest zbieżny jednostajnie do f.

12. Pokaż bezpośrednio, nie korzystając z twierdzenia Weierstrassa, że funkcję $x \to \sqrt{x}$ można aproksymować jednostajnie wielomianami na odcinku $[1/2, 3/2]$. W tym celu rozwiń tę funkcję w szereg Taylora wokół 1.

13. Niech $f : (a-\epsilon, b+\epsilon)$ będzie funkcją różniczkowalną w sposób ciągły. Udowodnij, że ciąg ilorazów różnicowych $f_n(x) = n\Big(f(x+\frac{1}{n}) - f(x)\Big)$ jest zbieżny jednostajnie do f'.

14. Zbadaj jednostajną zbieżność ciągów funkcyjynych a) $f_n(x) = x^{n}(1-x^{n})$ na $[0,1]$, b) $f_n(x) = \frac{1}{nx}$ na $(0,1]$.

15. Udowodnij, że funkcje a) $f(x) = \frac{1}{1+|x|}$ na $\boldsymbol{R}$, b) $g(x) = e^{-x}$ na $[0,\infty)$, c) $h(x) = x^{x}\sin x$ na $[0,1]$ są jednostajnie ciągłe.

16. Udowodnij, że funkcja f ciągła na $\boldsymbol{R}$ i mająca granice liczbowe w $\pm\infty$ jest jednostajnie ciągła.

17. Niech $u_n \rightrightarrows u$ na I i niech $v \in C(I)$ będzie ograniczona. Pokaż, że $vu_n \rightrightarrows vu$.

18. Określ obszar zbieżności bezwzględnej i warunkowej szeregów: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^{n}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n}\sin^{n} x}{n^{2}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n}}{1-x^{n}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n3^{2n}}{2^{n}} x^{n}(1-x)^{n}$.

19. Pokaż, że jeśli *szereg Dirichleta* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x}}$ jest zbieżny dla pewnego $x = x_0$, to jest zbieżny jednostajnie dla $x \geqslant x_0$.

20. Określ obszar zbieżności *szeregów Newtona*: $\sum_{n=1}^{\infty}\binom{x}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\binom{x}{n}$.

21. Niech $f : [a,b] \to \boldsymbol{R}$ będzie dowolną funkcją. Niech $f_n(x) = \frac{[nf(x)]}{n}$. Pokaż, że f_n dąży jednostajnie do f na $[a,b]$.

22. Posługując się kryterium Weierstarassa, udowodnij, że podane szeregi są jednostajnie zbieżne:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+n^2}\quad (x\in\boldsymbol{R}),\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x+2^n}\quad (-2<x<\infty),$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{1+n^5x^2}\quad (x\in\boldsymbol{R}),\qquad \sum_{n=1}^{\infty}x^2e^{-nx}\quad (x\geqslant 0).$$

23. Wykaż, że funkcja $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k^3}$ jest ciągła i ma ciągła pochodną w $\boldsymbol{R}$.

24. Wykaż, że funkcja $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^x}$ w obszarze $x > 2$ jest ciągła i ma ciągłą pochodną.

25. Uzasadnij jednostajną zbieżność podanych szeregów przy pomocy kryteriów Abela i Dirichleta:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{\sqrt{n^2+x^2}},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{\sqrt{n+x}},\qquad 0<\delta\leqslant x\leqslant 2\pi-\delta,$$

oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+x)}},\qquad x\geqslant 0.$$

Dlaczego pierwsze dwa szeregi nie są zbieżne jednostajnie na całym przedziale $[0,2\pi]$? Podstaw $x_n = 1/n$.

26. Niech $f_n(x) = \sqrt{\frac{1}{n}+x^2}$. Pokaż, że ciągi funkcyjne $\{f_n\}$ i $\{f_n'\}$ są zbieżne punktowo, ale nieprawdą jest, że

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x),\qquad x\in\boldsymbol{R}.$$

27. Udowodnij, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x^{2n}}$ jest jednostajnie zbieżny w każdym przedziale $[-\eta,\eta]$, gdzie $0<\eta<1$, ale nie w $(-1,1)$.

28. Określ obszar zbieżności szeregów:

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^2\sin^n x,\ \sum_{n=1}^{\infty}3^n\sin\frac{1}{4^n x},\ \sum_{n=1}^{\infty}nxe^{-nx},\ \sum_{n=1}^{\infty}\log^n(x+2),$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+x^n},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x^n},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+x^n}{1+3^nx^n}.$$

29. Udowodnij, że podane niżej szeregi są jednostajnie zbieżne:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2+x^2}\ (x\in\boldsymbol{R}),\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log(1+nx)}{nx^n}\ (x\geqslant 2),$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}e^{-n|x-n|}\ (x\in\boldsymbol{R}),\quad \sum_{n=1}^{\infty}n^2x^2e^{-n^2|x|}\ (x\in\boldsymbol{R}).$$

30. Pokaż, że funkcja $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\log(1+kx)}{kx^k}$ ma pochodne wszystkich rzędów.

31. Pokaż, że ciąg $\varphi_n(x) = (1+\frac{x}{x})^n e^{-2x}$ jest zbieżny monotonicznie i jednostajnie.

32. Pokaż, że $\left|\sum_{k=1}^{n} \sin nx \cdot \sin n^2 x\right| \leqslant 1$ dla każdego $x \in \boldsymbol{R}$ i każdego $n \in \boldsymbol{N}$.

33. Udowodnij, że podane szeregi są jednostajnie zbieżne na $\boldsymbol{R}$:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n+x^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin nx}{n+x^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin nx}{\sqrt{n}+x^4}(1+\frac{x}{n})^n e^{-2x}. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx \sin n^2 x}{n+x^2}.$$

34. Pokaż, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$ jest zbieżny jednostajnie na $[1,\infty)$.

35. Wykaż, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x \sin(n^2 x)}{n^2}$ definiuje funkcję ciągłą na $\boldsymbol{R}$, a szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \log^n(1+x)$ funkcję ciągłą na $(\frac{1}{e}-1, e-1)$.