9. Całkowanie

Zacznijmy[1] od podstawowego dla teorii całki pojęcia podziału. *Podziałem odcinka* $[a,b] \subset \boldsymbol{R}$ nazywamy każdy skończony zbiór $P \subset [a,b]$ zawierający oba końce odcinka. Niech

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

będą punktami podziału P. Odcinki

$$I_k = [x_{k-1}, x_k], \qquad 1 \leqslant k \leqslant n,$$

będziemy nazywali *odcinkami podziału* P. Jeśli $f : [a,b] \to \boldsymbol{R}$ jest funkcją ograniczoną, a P podziałem $[a,b]$, to liczby

$$\boldsymbol{U}(f,P) = \sum_{k=1}^{n} \sup_{I_k} f \cdot |I_k|, \qquad \boldsymbol{L}(f,P) = \sum_{k=1}^{n} \inf_{I_k} f \cdot |I_k|,$$

gdzie $|I_k|$ oznacza długość k-tego odcinka podziału P, nazywamy odpowiednio *górną* i *dolną sumą całkową* funkcji f.

9.1. Lemat. *Jeśli $P \subset Q$ są podziałami odcinka $[a,b]$, a f jest funkcją ograniczoną na $[a,b]$, to*

$$\boldsymbol{L}(f,P) \leqslant \boldsymbol{L}(f,Q) \leqslant \boldsymbol{U}(f,Q) \leqslant \boldsymbol{U}(f,P).$$

Dowód. Nierówność środkowa jest oczywista, a nierówności skrajnych dowodzi się podobnie. Dowiedziemy, że $\boldsymbol{U}(f,Q) \leqslant \boldsymbol{U}(f,P)$. Przez łatwą indukcję dowód sprowadza się do przypadku, gdy Q zawiera tylko o jeden punkt więcej niż P. Niech więc $P = \{x_j\}_{j=0}^{n}$, $Q = P \cup \{c\}$ i $x_{k-1} < c < x_k$ dla pewnego $1 \leqslant k \leqslant n$. Wtedy

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{U}(f,P) &= \sum_{j=1}^{n} \sup_{[x_{j-1},x_j]} f(x)(x_j - x_{j-1}) \\
&= \sum_{j \neq k} \sup_{[x_{j-1},x_j]} f(x)(x_j - x_{j-1}) + \sup_{[x_{k-1},x_k]} f(x)(x_k - x_{k-1}) \\
&\geqslant \sum_{j \neq k} \sup_{[x_{j-1},x_j]} f(x)(x_j - x_{j-1}) + \sup_{[x_{k-1},c]} f(x)(c - x_{k-1}) + \sup_{[c,x_k]} f(x)(x_k - c) \\
&= \boldsymbol{U}(f,Q),
\end{aligned}$$

co było do okazania. □

9.2. Wniosek. *Jeśli P i Q są podziałami odcinka $[a,b]$, a f jest funkcją ograniczoną na $[a,b]$, to*

$$\boldsymbol{L}(f,Q) \leqslant \boldsymbol{U}(f,P).$$

Dowód. Rzeczywiście,

$$\boldsymbol{L}(f,Q) \leqslant \boldsymbol{L}(f,Q \cup P) \leqslant \boldsymbol{U}(f,Q \cup P) \leqslant \boldsymbol{U}(f,P)$$

na mocy lematu. □

Niech $\mathcal{P}$ oznacza rodzinę wszystkich podziałów odcinka $[a,b]$. Skoro każda całkowa suma dolna danej funkcji ograniczonej jest nie większa od każdej sumy górnej, zbiór wszystkich dolnych sum całkowych jest ograniczony od góry, a zbiór wszystkich sum górnych ograniczony od dołu.

Liczby

$$\int^{\star} f = \inf_{P \in \mathcal{P}} \boldsymbol{U}(f,P), \qquad \int_{\star} f = \sup_{P \in \mathcal{P}} \boldsymbol{L}(f,P)$$

[1] Dziękuję Panu Tomaszowi Stachowiakowi za uważne przeczytanie tego rozdziału i cenne uwagi.

nazywamy odpowiednio *górną* i *dolną całką Darboux* funkcji f. Oczywiście

$$\int_\star f \leqslant \int^\star f.$$

9.3. Lemat. *Jeśli f, g są ograniczonymi funkcjami na $[a,b]$, a $\lambda > 0$, to*

$$\int^\star f+g \leqslant \int^\star f + \int^\star g, \qquad \int_\star f+g \geqslant \int_\star f + \int_\star g,$$
$$\int^\star \lambda f = \lambda \int^\star f, \qquad \int_\star \lambda f = \lambda \int_\star f, \qquad \int^\star -f = -\int_\star f.$$

Ograniczoną funkcję $f : [a,b] \to \boldsymbol{R}$ nazywamy *całkowalną* w sensie Riemanna, jeśli jej całki Darboux są równe. Ich wspólną wartość nazywamy wtedy *całką Riemanna* z funkcji f i piszemy

$$\int_{[a,b]} f = \int_a^b f = \int_a^b f(x)dx = \int_\star f = \int^\star f.$$

Rodzinę funkcji całkowalnych na odcinku $[a,b]$ oznaczać będziemy przez $\mathcal{R}([a,b])$.

Zauważmy, że

$$\boldsymbol{U}(f,P) - \boldsymbol{L}(f,P) = \sum_k \sup_{x,y \in I_k} (f(x) - f(y))|I_k| = \Omega(f,P),$$

gdzie I_k są odcinkami wyznaczonymi przez podział P.

Z definicji całkowalności funkcji wynika łatwo

9.4. *Funkcja ograniczona $f : [a,b] \to \boldsymbol{R}$ jest całkowalna, wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje podział P odcinka $[a,b]$, taki że*

$$\Omega(f,P) < \varepsilon.$$

Z Lematu 9.3 łatwo wynika

9.5. Lemat. *Jeśli f, g są całkowalnymi funkcjami na $[a,b]$, a $\lambda \in \boldsymbol{R}$, to*

$$\int f + \lambda g = \int f + \lambda \int g.$$

9.6. Lemat. *Jeśli $f \in \mathcal{R}([a,b])$, to $|f| \in \mathcal{R}([a,b])$.*

Dowód. Rzeczywiście, dla każdego podziału P

$$\Omega(|f|,P) \leqslant \Omega(f,P),$$

co wynika z nierówności trójkąta. Zatem całkowalność f pociąga całkowalność $|f|$. $\square$

9.7. *Jeśli $f, g \in \mathcal{R}([a,b])$ i $f \leqslant g$, to $\int f \leqslant \int g$. W szczególności, jeśli $f \geqslant 0$, to $\int f \geqslant 0$.*

9.8. *Jeśli $f \in \mathcal{R}([a,b])$, to $|\int_a^b f| \leqslant \int_a^b |f|$.*

Dowód. Mamy $f \leqslant |f|$ i $-f \leqslant |f|$, więc $\int f \leqslant \int |f|$ oraz $-\int f \leqslant \int |f|$. Stąd

$$|\int f| \leqslant \int |f|.$$

$\square$

9.9. *Jeśli $f \in \mathcal{R}([a,b])$, to $f \in \mathcal{R}([c,d])$ dla każdego $[c,d] \subset [a,b]$. Z drugiej strony, jeśli $f \in \mathcal{R}([a,c])$ i $f \in \mathcal{R}([c,b])$, to $f \in \mathcal{R}([a,b]$.*

Dowód. Niech P będzie podziałem odcinka $[a,b]$. Niech

$$P' = (P \cap [c,d]) \cup \{c,d\}.$$

Zbiór P' jest podziałem $[c,d]$ i łatwo zauważyć, że

$$\Omega_{[c,d]}(f,P') \leqslant \Omega_{[a,b]}(f,P),$$

skąd natychmiast wynika pierwsza część tezy.

Jeśli natomiast P_1 i P_2 są odpowiednio podziałami $[a,c]$ i $[c,b]$, to $P = P_1 \cup P_2$ jest podziałem $[a,b]$ i

$$\Omega_{[a,b]}(f,P) \leqslant \Omega_{[a,c]}(f,P_1) + \Omega_{[c,b]}(f,P_2).$$

Stąd już wynika druga część tezy. $\square$

9.10. *Jeśli $f \in \mathcal{R}([a,b])$ i $a \leqslant c \leqslant b$, to*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Dowód. Wystarczy zauważyć, że jeśli P_1 i P_2 są odpowiednio podziałami $[a,c]$ i $[c,b]$, to

$$\underset{a}{\overset{b}{\boldsymbol{U}}}(f, P_1 \cup P_2) = \underset{a}{\overset{c}{\boldsymbol{U}}}(f, P_1) + \underset{c}{\overset{b}{\boldsymbol{U}}}(f, P_2).$$

$\square$

Średnicą podziału $P = \{x_j\}_{j=0}^n$ nazywamy liczbę

$$\delta(P) = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |x_j - x_{j-1}|.$$

9.11. Twierdzenie. *Jeśli $f : [a,b] \to \boldsymbol{R}$ jest ciągła, to jest całkowalna.*

Dowód. Niech $\varepsilon > 0$. Funkcja f jest jednostajnie ciągła, więc istnieje $\delta > 0$, taka że

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}, \qquad |x-y| < \delta.$$

Niech P będzie podziałem odcinka $[a,b]$ o średnicy mniejszej niż δ. Niech $\{I_j\}_{j=0}^{n-1}$ będą odcinkami podziału. Wtedy

$$\begin{aligned} \Omega(f,P) &= \sum_{j=0}^{n-1} \sup_{I_j}(f(x) - f(y))|I_j| \\ &< \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{j=0}^{n-1} |I_j| = \varepsilon, \end{aligned}$$

co dowodzi naszej tezy. $\square$

9.12. Przykład. Rozpatrzmy bardzo prosty lecz ważny przykład. Niech $f(x) = 1$ na odcinku $[a,b]$. Wtedy dla każdego podziału P

$$\boldsymbol{L}(f,P) = \boldsymbol{U}(f,P) = b - a,$$

więc f jest całkowalna i $\int_a^b f = b - a$.

Dla ograniczonej funkcji $f : I \to \boldsymbol{R}$ wprowadźmy oznaczenie

$$\|f\| = \sup_{x \in I} |f(x)|.$$

9.13. Lemat. *Dla podziałów $P \subset Q$ odcinka $[a, b]$ i ograniczonej funkcji f na tym przedziale zachodzi nierówność*

$$\boldsymbol{U}(f, P) \leqslant \boldsymbol{U}(f, Q) + 2\|f\| \cdot |Q \setminus P| \cdot \delta(P),$$

gdzie $|Q|$ oznacza liczbę elementów Q.

Dowód. Lematu dowodzi się łatwo przez indukcję ze względu na liczebność zbioru $Q \setminus P$. □

9.14. Twierdzenie. *Niech $f \in \mathcal{R}([a, b])$. Jeśli $\{P_n\}$ jest ciągiem podziałów odcinka $[a, b]$, takim że $\lim_{n\to\infty} \delta(P_n) = 0$, to*

$$\boldsymbol{U}(f, P_n) \to \int_{[a,b]} f, \qquad \boldsymbol{L}(f, P_n) \to \int_{[a,b]} f.$$

Dowód. Niech $\varepsilon > 0$. Istnieje podział Q odcinka $[a, b]$, taki że

$$\boldsymbol{U}(f, Q) < \int_{[a,b]} f + \varepsilon.$$

Niech N będzie tak duże, aby dla $n \geqslant N$ było

$$\delta(P_n) < \frac{\varepsilon}{2\|f\||Q|}.$$

Na mocy Lematu 9.13

$$\begin{aligned} \boldsymbol{U}(f, P_n) &\leqslant \boldsymbol{U}(f, P_n \cup Q) + 2\|f\||Q|\delta(P_n) \\ &< \int_{[a,b]} f + 2\varepsilon, \end{aligned}$$

co dowodzi pierwszej równości granicznej. Z niej wynika już druga. Rzeczywiście,

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{L}(f, P_n) = \lim_{n\to\infty} -\boldsymbol{U}(-f, P_n) = -\int_{[a,b]} (-f) = \int_{[a,b]} f,$$

co kończy dowód. □

Niech będzie dana funkcja ograniczona $f : [a, b] \to \boldsymbol{R}$ i podział $P = \{x_j\}_{j=0}^{k}$ tego odcinka. Niech

$$\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_k), \qquad c_j \in [x_{j-1}, x_j].$$

Wtedy sumę

$$S(f, P, \mathbf{c}) = \sum_{j=1}^{k} f(c_j)(x_j - x_{j-1})$$

nazywamy *sumą riemannowską* funkcji f wyznaczoną przez podział P i ciąg punktów pośrednich $\mathbf{c}$.

9.15. Wniosek. *Niech $f \in \mathcal{R}([a, b])$. Jeśli P_n jest ciągiem podziałów o średnicach zbieżnych do zera, to sumy riemannowskie $S(f, P_n, \mathbf{c_n})$ dążą do całki z funkcji f.*

Dowód. Łatwo zauważyć, że dla każdego n

$$\boldsymbol{L}(f, P_n) \leqslant S(f, P_n, \mathbf{c_n}) \leqslant \boldsymbol{U}(f, P_n),$$

więc wystarczy zastosować poprzedni lemat i twierdzenie o trzech ciągach. □

9.16. Przykład. Scałkujmy funkcję *cosinus* na odcinku $[0, a]$. Funkcja ta jako ciągła jest całkowalna, więc można to zrobić za pomocą sum riemannowskich. Niech

$$P_n = \left\{ \frac{ka}{n} \right\}_{k=0}^{n}.$$

Wybierając $c_k = \frac{(k-1)a}{n}$ i kładąc $\mathbf{c_n} = (c_k)_k$, mamy

$$S_n = S(\cos, P_n, \mathbf{c_n}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a}{n} \cos(k-1) \cdot \frac{a}{n}$$
$$= \frac{a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \cos k \frac{a}{n} = \frac{a}{n} \cdot \frac{\sin \frac{a}{2} \cos \frac{(n-1)a}{2n}}{\sin \frac{a}{2n}},$$

skąd, jak łatwo widać,

$$\int_0^a \cos x\, dx = \lim_{n\to\infty} S_n = 2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2} = \sin a.$$

9.17. Przykład. Obliczmy całkę $\int_0^a x^p dx$ dla $p > 0$. Funkcja jest ciągła, więc całkowalna. Jak wyżej, posłużymy się sumami Riemanna. Niech P_n i $\mathbf{c_n}$ będą jak w poprzednim przykładzie. Wtedy

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a}{n} \left(\frac{k}{n} a \right)^p = \frac{a^{p+1}}{n^{p+1}} \sum_{k=1}^{n} k^p = a^{p+1} \cdot \frac{\sum_{k=1}^{n} k^p}{n^{p+1}}.$$

Pamiętamy, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} k^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1},$$

więc

$$\int_0^a x^p dx = \frac{a^{p+1}}{p+1}.$$

Dla $a > b$ oznaczmy

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Nietrudno sprawdzić, że dla dowolnych $a, b, c \in \boldsymbol{R}$

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Nie tylko funkcje ciągłe są całkowalne.

9.18. *Każda funkcja monotoniczna na przedziale $[a, b]$ jest całkowalna.*

Dowód. Niech f będzie monotoniczna i niestała. Wtedy $f(a) \neq f(b)$. Niech $\varepsilon > 0$ i niech P będzie podziałem odcinka $[a, b]$ o średnicy

$$\delta(P) = \frac{\varepsilon}{|f(b) - f(a)|}.$$

Mamy wówczas

$$\Omega(f, P) \leqslant \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|(x_k - x_{k-1}) \leqslant \delta(P)|f(b) - f(a)| = \varepsilon,$$

co pociąga naszą tezę. $\square$

9.19. Przykład. Niech f będzie funkcją na $[0,1]$ zdefiniowaną tak:

$$f(x) = \begin{cases} a_n, & x \in (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}], \\ a, & x = 0, \end{cases}$$

gdzie a_n jest ciągiem monotonicznie zbieżnym do a. Funkcja f jest nieciągła w nieskończonej ilości punktów, ale jest monotoniczna, więc całkowalna.

O innych nieciągłych funkcjach całkowalnych mówi kolejne twierdzenie.

9.20. Twierdzenie. *Jeśli ograniczona funkcja f na przedziale domkniętym ma skończenie wiele punktów nieciągłości, to jest całkowalna.*

Dowód. Załóżmy najpierw, że jedynymi punktami nieciągłości f są końce przedziału. Dla zadanego $0 < \varepsilon < \frac{b-a}{2}$ niech P będzie podziałem odcinka $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$, takim że

$$\Omega_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon}(f,P) < \varepsilon.$$

Taki podział istnieje, bo funkcja f jest ciągła na $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$. Niech $Q = P \cup \{a,b\}$ będzie podziałem $[a,b]$. Jak łatwo zauważyć,

$$\Omega(f,Q) < 4\|f\|\varepsilon + \varepsilon = (4\|f\|+1)\varepsilon,$$

co dowodzi całkowalności f.

Jeśli teraz $c_1, c_2 < \cdots < c_k$ są punktami nieciągłości f, to na mocy pierwszej części dowodu funkcja jest całkowalna na każdym z odcinków $[a,c_1]$, $[c_{j-1},c_j]$, $[c_k,b]$ dla $2 \leqslant j \leqslant k$. Zatem jest całkowalna na

$$[a,b] = [a,c_1] \cup \bigcup_{j=2}^{k} [c_{j-1},c_j] \cup [c_k,b].$$

□

Przechodzimy do badania całki jako funkcji górnej granicy całkowania.

9.21. Lemat. *Jeśli $f \in \mathcal{R}([a,b])$ i $c \in [a,b]$, to funkcja*

$$F(x) = \int_c^x f(t)dt, \qquad x \in [a,b],$$

jest lipschitzowska.

Dowód. Niech x, y będą punktami odcinka $[a,b]$. Wtedy

$$F(x) - F(y) = \int_c^x f(t)dt - \int_c^y f(t)dt = \int_y^x f(t)dt,$$

więc

$$|F(x) - F(y)| \leqslant |\int_y^x |f(t)|dt| \leqslant M|x-y|,$$

gdzie $M = \|f\|$. □

9.22. Lemat. *Jeśli $f \in \mathcal{R}([a,b])$ i $c \in [a,b]$, to funkcja*

$$F(x) = \int_c^x f(t)dt, \qquad x \in [a,b],$$

jest różniczkowalna w każdym punkcie x_0 ciągłości f. Ponadto

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

Dowód. Niech $\varepsilon > 0$. Ponieważ f jest ciągła w x_0, więc istnieje $\delta > 0$, taka że $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, o ile $|x - x_0| < \delta$. Mamy zatem

$$\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} \Big(f(t) - f(x_0)\Big)\,dt,$$

a wobec

$$\left|\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0)\right| \leqslant \frac{1}{|h|}\left|\int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)|\,dt\right| \leqslant \varepsilon\frac{1}{|h|}\left|\int_{x_0}^{x_0+h} dt\right| = \varepsilon$$

dla $|h| < \delta$, co kończy dowód. $\square$

Z poprzednich dwóch lematów wynika natychmiast *podstawowe twierdzenie rachunku różniczkowego i całkowego.*

9.23. Twierdzenie. *Jeśli $f \in C([a,b])$, to funkcja*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \qquad x \in [a,b],$$

jest różniczkowalna w przedziale (a,b) oraz

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x), \qquad x \in (a,b).$$

Zatem F jest pierwotną f w (a,b).

Można udowodnić trochę więcej.

9.24. Wniosek. *Jeśli $f \in C([a,b])$, to istnieje funkcja różniczkowalna $G : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, taka że $G'(x) = f(x)$ dla $x \in [a,b]$.*

Dowód. Funkcję f można rozszerzyć do funkcji g ciągłej na całej prostej, kładąc

$$g(x) = \begin{cases} f(a), & x < a, \\ f(x), & x \in [a,b], \\ f(b), & x > b. \end{cases}$$

Niech

$$G(x) = \int_a^x g(t)dt, \qquad x \in \boldsymbol{R}.$$

Na mocy twierdzenia funkcja G jest różniczkowalna na całej prostej i $G'(x) = g(x)$ dla $x \in \boldsymbol{R}$. W szczególności

$$G'(x) = f(x), \qquad x \in [a,b].$$

$\square$

9.25. Wniosek. *Jeśli $f \in C([a,b])$, $F \in C([a,b])$ oraz $F'(x) = f(x)$ dla $x \in (a,b)$, to*

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

Dowód. Niech

$$F_0(x) = \int_a^x f(t)dt, \qquad x \in [a,b].$$

Wtedy $(F - F_0)' = 0$ na (a,b), więc $F - F_0 = c$ na (a,b), a przez ciągłość także na końcach przedziału. Stąd

$$\int_a^b f(t)dt = F_0(b) - F_0(a) = (F_0(b) + c) - (F_0(a) + c) = F(b) - F(a),$$

tak jak chcieliśmy. $\square$

9.26. Przykład. a) Mamy $(\sin x)' = \cos x$, więc

$$\int_a^b \cos x\,dx = \sin b - \sin a.$$

b) Mamy $(x^{p+1})' = (p+1)x^p$, więc

$$\int_a^b x^p dx = \frac{1}{p+1}(b^{p+1} - a^{p+1}), \qquad a, b > 0, \;\; p \neq -1.$$

c) Niech

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad |x| < r,$$

gdzie $r > 0$ jest promieniem zbieżności. Wiemy, że

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}, \qquad |x| < r,$$

jest pierwotną f. Wobec tego dla $[a, b] \subset (-r, r)$

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a),$$

czyli

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_a^b x^n dx.$$

9.27. *Jeśli $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$, to $fg \in \mathcal{R}([a, b])$.*

Dowód. Ponieważ

$$f(x)g(x) - f(y)g(y) \leqslant \|g\||f(x) - f(y)| + \|f\||g(x) - g(y)|,$$

więc dla każdego podziału P

$$\Omega(fg, P) \leqslant \|g\|\Omega(f, P) + \|f\|\Omega(g, P),$$

co pozwala wnioskować, że iloczyn fg jest całkowalny, pod warunkiem że obie funkcje f i g są całkowalne. □

9.28. Twierdzenie (całkowanie przez części)**.** *Jeśli $f, g : (a - \varepsilon, b + \varepsilon) \to \boldsymbol{R}$ są różniczkowalne w sposób ciągły, to*

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx,$$

gdzie

$$\varphi(x)\big|_a^b = \varphi(b) - \varphi(a).$$

Dowód. Wiemy, że

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x), \qquad x \in (a - \varepsilon, b + \varepsilon),$$

więc całkując obie strony i korzystając z podstawowego twierdzenia, otrzymujemy

$$f(b)g(b) - f(a)g(a) = \int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx,$$

skąd już natychmiast wynika wzór na całkowanie przez części. □

9.29. Przykład. Mamy

$$\int_a^x \log t dt = \int_a^x t' \log t dt = t \log t\Big|_a^x - \int_a^x dt = t(\log t - 1)\Big|_a^x.$$

Zauważmy też, że rzeczywiście funkcja $x \to x(\log x - 1)$ jest pierwotną funkcji logarytmicznej,

9.30. Przykład. Niech $m, n \in \boldsymbol{Z}$ i niech $m \neq 0$. Wtedy

$$\begin{aligned} I_{n,m} &= \int_0^{2\pi} \sin nx \sin mx \, dx = n \cos nx \sin mx\Big|_0^{2\pi} + \frac{n}{m} \int_0^{2\pi} \cos nx \cos mx \, dx \\ &= (\frac{n}{m})^2 \int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx \, dx = (\frac{n}{m})^2 I_{n,m}, \end{aligned}$$

więc $(1 - (\frac{n}{m})^2) I_{n,m} = 0$, skąd

$$I_{n,m} = \begin{cases} 0, & |n| \neq |m|, \\ \pm\pi, & |n| = |m|. \end{cases} \tag{9.31}$$

9.32. Przykład. Niech

$$J_n = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^n}.$$

Oczywiście, $J_1 = \operatorname{arc\,tg} 1$. Wyprowadzimy teraz wzór rekurencyjny na J_n. Mamy

$$J_{n+1} = J_n - \int_0^1 x \cdot \frac{x \, dx}{(1+x^2)^{n+1}},$$

więc, całkując przez części,

$$\int_0^1 x \cdot \frac{x \, dx}{(1+x^2)^{n+1}} = -\frac{1}{2n} + \frac{J_n}{2n},$$

otrzymujemy

$$J_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} J_n + \frac{1}{2n}.$$

W dalszych rozważaniach dużą rolę odegra ciąg o wyrazach

$$w_n = \frac{4^n}{\binom{2n}{n}}.$$

9.33. Lemat. *Niech $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx$. Wtedy*

$$I_{2n} = \frac{\pi}{2w_n}, \qquad I_{2n+1} = \frac{w_n}{2n+1}. \tag{9.34}$$

Dowód. Oba wzory wynikają łatwo z zależności rekurencyjnej

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n, \tag{9.35}$$

która bierze się z całkowania przez części:

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= \int_0^{\pi/2} \sin^{n+2} x \, dx = -\int_0^{\pi/2} \sin^{n+1} x (\cos x)' \, dx \\ &= (n+1) \int_0^{\pi/2} \sin^n x \cos^2 x \, dx = (n+1) I_n - (n+1) I_{n+2}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że ze względu na to, że $\sin 0 = \cos \pi/2 = 0$, przyrosty wartości funkcji we wzorze na całkowanie przez części znikają. $\square$

Z zależności (9.35) wypływa następujący wniosek.

9.36. Wniosek. *Niech* $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx$. *Wtedy*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = 1.$$

Dowód. Rzeczywiście, jak łatwo widzieć

$$I_{2n+1} \leqslant I_{2n} \leqslant I_{2n-1} = \frac{2n+1}{2n} I_{2n+1},$$

skąd

$$1 \leqslant \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \leqslant \frac{2n}{2n+1},$$

co pozwala wyprowadzić naszą tezę za pomocą lematu o trzech ciągach. □

9.37. Wniosek (wzór Wallisa). *Jest*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4^n \binom{2n}{n}^{-1}}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{w_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{\pi},$$

Dowód. Na mocy Lematu 9.33

$$\frac{\pi}{2(2n+1)} = I_{2n} I_{2n+1} = I_{2n}^2 \cdot \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}},$$

więc

$$\lim_{n\to\infty} 2(2n+1) I_{2n}^2 = \frac{1}{\pi}.$$

Prosty rachunek pokazuje, że

$$2(2n+1) I_{2n}^2 = \frac{(n+1/2)\pi^2}{w_n^2}.$$

□

I jeszcze jedna retrospekcja.

9.38. Twierdzenie (wzór Stirlinga). *Dla każdego* $n \in \boldsymbol{N}$

$$\sqrt{2\pi} < \frac{n! e^n}{n^{n+1/2}} < \sqrt{2\pi} e^{\frac{1}{12n}}.$$

Dowód. Pamiętamy, że

$$A < \frac{n! e^n}{n^{n+1/2}} < A e^{\frac{1}{12n}},$$

gdzie

$$A = \lim_{n\to\infty} s_n, \qquad s_n = \frac{n! e^n}{n^{n+1/2}}.$$

Pozostaje wykazać, że $A = \sqrt{2\pi}$. W tym celu zauważmy, że

$$\frac{s_n^2}{s_{2n}} = \frac{(n!)^2 2^{2n+1/2}}{(2n)! n^{1/2}} = \frac{\sqrt{2}\, w_n}{n^{1/2}},$$

więc na mocy wzoru Wallisa

$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{s_n^2}{s_{2n}} = \sqrt{2\pi},$$

co było do okazania. □

I jeszcze jedno zastosowanie całkowania przez części – reszta Taylora w postaci całkowej.

9.39. Twierdzenie. *Niech f będzie funkcją różniczkowalną n razy w sposób ciągły w otoczeniu punktu $a \in \boldsymbol{R}$. Wówczas dla dostatecznie małych h jej reszta Taylora wyraża się wzorem*

$$R_n(h) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^h (h-t)^{n-1} f^{(n)}(a+t)dt.$$

Dowód. Niech $S_n(h)$ oznacza prawą stronę wzoru. Gdy $n = 1$

$$S_1(h) = \int_0^h f'(a+t)dt = f(a+h) - f(a) = R_1(h).$$

Przypuśćmy przez indukcję, że $S_n(h) = R_n(h)$. Wtedy, całkując przez części, widzimy, że

$$\begin{aligned} S_{n+1}(h) &= \frac{1}{n!}(h-t)^n f^{(n)}(a+t)\Big|_0^h + \frac{1}{(n-1)!}\int_0^h (h-t)^{n-1} f^{(n)}(a+t)dt \\ &= -\frac{1}{n!}h^n f^{(n)}(a) + R_n(h) = R_{n+1}(h), \end{aligned}$$

czego należało dowieść. □

9.40. Przykład. Przypuśćmy, że $f \in C^1([a,b])$ nigdzie nie znika. Wtedy, jak łatwo sprawdzić,

$$\frac{d}{dx}\log|f(x)| = \frac{f'(x)}{f(x)},$$

a wobec tego

$$\int_a^b \frac{f'(x)\,dx}{f(x)} = \log\frac{f(b)}{f(a)}.$$

Funkcję f'/f nazywa się często *pochodną logarytmiczną* funkcji f.

A teraz wzór na *całkowanie przez podstawienie.*

9.41. Twierdzenie. *Niech $u : (a-\varepsilon, b+\varepsilon) \to \boldsymbol{R}$ będzie różniczkowalna w sposób ciągły. Jeśli $f \in C(u([a,b]))$, to*

$$\int_{u(a)}^{u(b)} f(x)dx = \int_a^b f(u(y))u'(y)dy.$$

Dowód. Niech $u([a,b]) = [c,d]$ i niech $F : (c-\varepsilon, d+\varepsilon) \to \boldsymbol{R}$ będzie funkcją różniczkowalną, taką, że $F'(x) = f(x)$ dla $x \in [c,d]$. Wtedy

$$\frac{d}{dy}F(u(y)) = F'(u(y))u'(y) = f(u(y))u'(y)$$

dla $y \in [a,b]$, więc

$$\int_a^b f(u(y)u'(y)dy = F(u(b)) - F(u(a)) = \int_{u(a)}^{u(b)} f(x)dx,$$

co należało pokazać. □

9.42. *Uwaga.* Jeśli dodatkowo u' nigdzie nie znika, funkcja u ma odwrotną v i wzór można zapisać w nieco innej postaci:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_{v(\alpha)}^{v(\beta)} f(v^{-1}(y))(v^{-1})'(y)\,dy.$$

Tak więc w konkretnych sytuacjach możemy dokonywać podstawienia $x = u(y)$ lub $y = v(x)$, przy czym w drugim przypadku musimy pamiętać, że $v'(x)$ nie może znikać na przedziale całkowania.

9.43. Przykład. Aby obliczyć całkę

$$I = \int_1^4 \frac{dx}{(1+x)^2\sqrt{x}},$$

dokonujemy podstawienia $x = y^2$, $dx = 2y\,dy$, które daje

$$I = \int_1^2 \frac{2y\,dy}{(1+y^2)^2 y} = 2\int_1^2 \frac{dy}{(1+y^2)^2}.$$

Ostatnią całkę już umiemy obliczyć.

9.44. Przykład. Rozważmy całkę

$$I = \int_\alpha^\beta \frac{dx}{\sqrt{x^2+2bx+c}},$$

przy założeniu, że odcinek $[\alpha, \beta]$ leży w obszarze, gdzie $x^2 + 2bx + c > 0$. Rozważmy najpierw przypadek $c = b^2$. Wtedy $x^2 + 2bx + c = (x+b)^2$, więc

$$I = \int_\alpha^\beta \frac{dx}{|x+b|} = \log\frac{\beta+b}{\alpha+b}, \qquad \alpha + b > 0,$$

oraz

$$I = \int_\alpha^\beta \frac{dx}{|x+b|} = \log\frac{\alpha+b}{\beta+b}, \qquad \beta + b < 0.$$

Jeśli $c \neq b^2$, stosujemy podstawienie

$$v = v(x) = \sqrt{x^2+2bx+c} + x,$$

skąd

$$\frac{dv}{dx} = \frac{b+v}{v-x}.$$

Aby upewnić się, że pochodna v' nie znika, rozwiązujemy równanie

$$v(x) = -b, \qquad x \in [\alpha, \beta].$$

Po prostych przekształceniach dostajemy wykluczoną mozliwość $c = b^2$. Zatem $v' \neq 0$ na $[\alpha, \beta]$ i całkowanie przez podstawienie daje

$$I = \int_{v(\alpha)}^{v(\beta)} \frac{1}{v-x}\cdot\frac{v-x}{b+v}\,dv = \int_{v(\alpha)}^{v(\beta)} \frac{dv}{b+v} = \int_{\sqrt{\alpha^2+2b\alpha+c}+\alpha}^{\sqrt{\beta^2+2b\beta+c}+\beta} \frac{dv}{b+v}$$
$$= \log\frac{\sqrt{\beta^2+2b\beta+c}+\beta+b}{\sqrt{\alpha^2+2b\alpha+c}+\alpha+b}.$$

Zauważmy, że jeśli $\alpha + b > 0$, otrzymujemy poprawny wynik, nawet jeśli $c = b^2$. Podstawienie to nazywa się *podstawieniem Eulera.*

I jeszcze jedno charakterystyczne podstawienie

9.45. Przykład. Aby obliczyć całkę

$$I = \int_a^{\pi-a} \frac{dx}{\sin x}, \qquad 0 < a < \pi/2,$$

skorzystamy z podstawienia $t = \operatorname{tg}(x/2)$, które daje

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}(x/2)}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)} = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad dt = \frac{1}{2}(1+t^2)dx,$$

a więc

$$I=\int_{\operatorname{tg}(a/2)}^{\operatorname{tg}(\pi/2-a/2)} \frac{1+t^2}{2t}\cdot\frac{2\,dt}{1+t^2}=\int_{\operatorname{tg}(a/2)}^{\operatorname{tg}(\pi/2-a/2)} \frac{dt}{t}=\log\frac{\operatorname{tg}(\pi/2-a/2)}{\operatorname{tg}(a/2)}.$$

Można uniknąć podstawienia, jeśli się zauważy, że

$$\frac{1}{\sin x}=\frac{\frac{1}{2}(1+\operatorname{tg}^2(x/2))}{\operatorname{tg}(x/2)}=\frac{(\operatorname{tg}(x/2))'}{\operatorname{tg}(x/2)}$$

jest pochodną logarytmiczną.

Przechodzimy do twierdzeń o *wartości średniej* dla całek.

9.46. Lemat. *Jeśli $f\in C([a,b]$ jest nieujemna i*

$$\int_a^b f(x)\,dx=0,$$

to $f(x)=0$ dla $x\in[a,b]$.

9.47. Twierdzenie. *Jeśli $f\in C([a,b])$, to istnieje $c\in(a,b)$, takie że*

$$\int_a^b f(x)dx=f(c)(b-a).$$

Dowód. Niech $F\in C([a,b])$ będzie pierwotną f na przedziale (a,b). Wtedy na mocy twierdzenia podstawowego i twierdzenia Lagrange'a

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)=F'(c)(b-a)=f(c)(b-a)$$

dla pewnego $c\in(a,b)$. □

9.48. Twierdzenie. *Niech $f,g\in C([a,b])$ i niech $g\geqslant 0$. Wtedy istnieje $c\in(a,b)$, takie że*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(c)\int_a^b g(x)dx.$$

Dowód. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $A=\int_a^b g(x)\,dx=1$. Funkcja f spełnia nierówności $m\leqslant f\leqslant M$, gdzie m i M są odpowiednio jej najmniejszą i największą wartością w $[a,b]$. Stąd $mg(x)\leqslant f(x)g(x)\leqslant Mg(x)$ dla $x\in[a,b]$ i

$$m\leqslant\int_a^b f(x)g(x)dx\leqslant M.$$

Funkcja f jest ciągła, a jej, więc istnieje $c\in[a,b]$, takie że

$$f(c)=\int_a^b f(x)g(x)dx,$$

co już jest niemal naszą tezą. Pozostaje jeszcze wykazać, że c można wybrać z wnętrza odcinka. Jeśli $f(c)=m$, to

$$\int_a^b (f(x)-m)g(x)\,dx=0,$$

więc $f(x)=f(c)$, tam gdzie $g(x)>0$. Istnieje więc wiele punktów wewnętrznych odcinka $[a,b]$, którymi mozna zastąpić c. Podobnie rozumujemy w przypadku, gdy $f(c)=M$. Jeśli zaś żaden z tych warunków nie jest spełniony, to $m<f(c)<M$. Niech $m=f(d_1)$ i $M=f(d_2)$. Na mocy własności Darboux istnieje punkt

$$c_1\in I(d_1,d_2)\subset(a,b),$$

taki że $f(c_1) = f(c)$, gdzie $I(d_1, d_2)$ oznacza odcinek otwarty o końcach d_1, d_2. □

Zwróćmy uwagę, że pierwsze twierdzenie o wartości średniej jest szczególnym przypadkiem drugiego, wtedy gdy $g(x) = 1$ dla $x \in [a, b]$.

I jeszcze trzecie twierdzenie o wartości średniej.

9.49. Twierdzenie. *Jeśli $f \in C([a, b])$, a $g : (a - \varepsilon, b + e) \to \boldsymbol{R}$ jest rosnąca i różniczkowalna w sposób ciągły, to istnieje $c \in (a, b)$, takie że*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^c f(x)dx + g(b)\int_c^b f(x)dx.$$

Dowód. Niech $F : (a - \varepsilon, b + \varepsilon)$ będzie pierwotną f na przedziale $[a, b]$. Wtedy

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b F'(x)g(x)dx = F(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)dx,$$

a skoro $g' \geqslant 0$, możemy zastosować drugie twierdzenie o wartości średniej, by znaleźć $c \in (a, b)$, takie że

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)dx &= F(b)g(b) - F(a)g(a) - F(c)\int_a^b g'(x)dx \\ &= F(b)g(b) - F(a)g(a) - F(c)\Big(g(b) - g(a)\Big) \\ &= g(a)\Big(F(c) - F(a)\Big) + g(b)\Big(F(b) - F(c)\Big)\end{aligned}$$

i po skorzystaniu z równości

$$F(c) - F(a) = \int_a^c f(x)dx, \qquad F(b) - F(c) = \int_c^b f(x)dx$$

otrzymać tezę. □

9.50. *Uwaga.* Założenie różniczkowalności funkcji g jest nieistotne. Można je obejść rozważając odpowiednio dobrane riemannowskie sumy całkowe i stosując przekształcenie Abela zamiast całkowania przez części. Ambitny Czytelnik zapewne zechce spróbować tej ciekawej metody.

Do tej pory całkowaliśmy funkcje ograniczone na skończonych przedziałach. Gdy odrzuci się chociaż jedno z tych założeń, sprawy się znacznie komplikują. Mamy wtedy do czynienia z *całkami niewłaściwymi.*

Niech będzie dana funkcja $f : [a, \infty) \to \boldsymbol{R}$. Jeśli f jest całkowalna na każdym przedziale $[a, b]$ i istnieje granica

$$I = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx,$$

to nazywamy ją *całką niewłaściwą* (pierwszego rodzaju) funkcji f na $[a, \infty)$ i oznaczamy

$$I = \int_a^\infty f(x)dx.$$

Analogicznie definiujemy całkę niewłaściwą

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx = \lim_{b\to-\infty}\int_b^a f(x)dx.$$

Niech będzie dana funkcja $f : [a, b) \to \boldsymbol{R}$. Jeśli f jest całkowalna na każdym przedziale $[a, t]$, gdzie $a < t < b$, i istnieje granica
$$I = \lim_{t \to b} \int_a^t f(x)dx,$$
to nazywamy ją *całką niewłaściwą* (drugiego rodzaju) funkcji f na $[a, b]$ i oznaczamy
$$I = \int_a^b f(x)dx.$$
Analogicznie definiujemy całkę niewłaściwą
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to a} \int_t^b f(x)dx$$
dla funkcji f całkowalnej na każdym przedziale $[t, b]$ dla $a < t < b$.

9.51. Przykład. Oto przykłady całek niewłaściwych pierwszego rodzaju.

a) Rozważmy całkę
$$\int_0^a e^{-x}\,dx = 1 - e^{-a} \xrightarrow{a} 1.$$
Możemy więc napisać
$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1.$$
Ta całka jest zbieżna.

b) Mamy też
$$\int_1^a \frac{dx}{x} = \log b \xrightarrow{a} \infty,$$
więc
$$\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \infty$$
i całka jest rozbieżna.

c) Całka
$$\int_0^\infty \sin x\,dx$$
jest rozbieżna, bo wyrażenie
$$\int_0^a \sin x\,dx = 1 - \cos a$$
nie ma granicy, gdy $a \to \infty$.

d) Mamy
$$\int_0^a \frac{dt}{(1+t^2)^n} = \int_0^{\operatorname{arc\,tg} a} (1 + \operatorname{tg}^2 x)^{-n+1}\,dx = \int_0^{\operatorname{arc\,tg} a} \cos^{2n-2}\,dx,$$
więc
$$\int_0^\infty \frac{dt}{(1+t^2)^n} = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n-2} x\,dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-2} y\,dy = \frac{\pi}{2w_{n-1}}.$$

e) Ze względu na rychłe zastosowanie (patrz (9.55) poniżej) zauważmy, że
$$\int_0^1 (1-z^2)^n dz = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x\,dx = \frac{w_n}{2n+1}.$$

9.52. *Całka*
$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}$$
dla $\alpha > 1$ i jest rozbieżna dla $\alpha \leqslant 1$.

Dowód. Przypadek $\alpha = 1$ rozstrzygnęliśmy już wyżej. Dla $\alpha \neq 1$

$$\int_1^u \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{u^{1-\alpha} - 1}{1 - \alpha},$$

skąd natychmiast wynika nasza teza. □

Rozważmy teraz przykład całki niewłaściwej drugiego rodzaju.

9.53. Przykład. Mamy

$$\int_\varepsilon^1 \log x \, dx = x(\log x - 1)\Big|_\varepsilon^1 = -1 + \varepsilon(1 - \log \varepsilon),$$

więc

$$\int_0^1 \log x \, dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \Big(1 + \varepsilon(1 - \log \varepsilon)\Big) = -1.$$

Możemy także zamienić tę całkę drugiego rodzaju na całkę pierwszego rodzaju przez podstawienie $x = 1/y$:

$$\int_\varepsilon^1 \log x \, dx = -\int_1^{1/\varepsilon} \frac{\log y \, dy}{y^2}.$$

Stąd

$$\int_0^1 \log x \, dx = -\int_1^\infty \frac{\log y \, dy}{y^2}.$$

Innym ważnym przykładem jest

$$\int_0^1 x^a \, dx = \int_1^\infty y^{-a-2} \, dy.$$

9.54. *Całka*

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1 - \alpha}$$

dla $\alpha < 1$ *i jest rozbieżna dla* $\alpha \geqslant 1$.

A oto całki niewłaściwe, które warto zapamiętać. Pierwsza z nich to *całka Poissona*

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{9.55}$$

Dowód. Mamy

$$1 - x^2 \leqslant e^{-x^2} \leqslant \frac{1}{1 + x^2},$$

więc całka jest zbieżna. Aby ją obliczyć, zauważmy, że

$$I(n) = \int_0^n e^{-x^2} \, dx = \sqrt{n} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-ny^2} \, dy$$

oraz na mocy powyższych oszacowań

$$\sqrt{n} \int_0^1 (1 - z^2)^n \, dz \leqslant I(n) \leqslant \sqrt{n} \int_0^\infty \frac{dz}{(1 + z^2)^n}.$$

Wstawiając znane wartości całek widzimy, że

$$\frac{w_n \sqrt{n}}{2n + 1} \leqslant I(n) \leqslant \frac{\pi \sqrt{n}}{2 w_{n-1}}.$$

Ze wzoru Wallisa wynika, że oba skrajne ciągi dążą do $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, skąd nasza teza. □

A oto całka zwana *całką Hilberta*:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}. \tag{9.56}$$

Dowód. Korzystając z trzeciego twierdzenia o wartości średniej, widzimy, że

$$\begin{aligned}\Big| \int_0^b \frac{\sin x}{x}\, dx - \int_0^a \frac{\sin x}{x}\, dx \Big| &= \Big| \int_a^b \frac{\sin x}{x}\, dx \Big| \\ &\leqslant \frac{1}{a} \Big| \int_a^c \frac{\sin x}{x}\, dx \Big| + \frac{1}{b} \Big| \int_c^b \frac{\sin x}{x}\, dx \Big| \leqslant 2\Big(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \Big),\end{aligned}$$

gdzie $0 < a < c < b$. Stąd wynika, że nasza całka jest zbieżna. Jej wartość obliczymy w następnym rozdziale. □

Jest jeszcze *całka Eulera*

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt, \qquad x > 0,$$

która definiuje funkcję zwaną *gammą Eulera*. Ta całka jest sumą dwóch całek niewłaściwych $\Gamma(x) = \Gamma_1(x) + \Gamma_2(x)$, gdzie

$$\Gamma_1(x) = \int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt, \qquad \Gamma_2(x) = \int_1^\infty t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Całki te są zbieżne, co wynika z oszacowań

$$t^{x-1} e^{-t} \leqslant t^{x-1}, \qquad 0 < t \leqslant 1, \tag{9.57}$$

oraz

$$t^{x-1} e^{-t} \leqslant t^{x-1} \frac{([x+1]+1)!}{t^{[x+1]+1}} \leqslant C(x) t^{-2}, \qquad t \geqslant 1. \tag{9.58}$$

9.59. *Funkcja Γ ma następującą własność*

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \qquad x > 0, \tag{9.60}$$

Dowód. Rzeczywiście, całkując przez części, dostajemy

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) = \lim_{\delta \to 0} \int_\delta^{1/\delta} t^x e^{-t} dt &= \lim_{\delta \to 0} \Big(x t^x e^{-t} \Big|_\delta^{1/\delta} + x \int_\delta^{1/\delta} t^{x-1} e^{-t} dt \Big) \\ &= x \lim_{\delta \to 0} \int_\delta^{1/\delta} t^{x-1} e^{-t} dt = x\Gamma(x).\end{aligned}$$

□

9.61. Wniosek. *Dla każdego $n \in \boldsymbol{N}$*

$$\Gamma(n) = (n-1)!, \qquad n \in \boldsymbol{N}.$$

Dowód. Istotnie,

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\, dt = 1,$$

skąd przez indukcję korzystającą z (9.60) wynika teza. □

Zauważmy jeszcze, że

$$\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big) = \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

9.62. Twierdzenie. *Niech będzie dana nieujemna funkcja $F \in \mathcal{R}(a,\infty)$. Załóżmy, że ciąg funkcji $f_n \in \mathcal{R}(a,\infty)$ jest wspólnie ograniczony przez funkcję F, tzn.*

$$|f_n(x)| \leqslant F(x), \qquad a \leqslant x < \infty,$$

i jest zbieżny niemal jednostajnie do funkcji f. Wówczas $f \in \mathcal{R}([a,\infty))$ i

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^\infty f_n(x)dx = \int_a^\infty f(x)dx.$$

Dowód. Zauważmy najpierw, że funkcja f jest całkowalna na każdym przedziale $[a,b]$ jako jednostajna granica funkcji całkowalnych i $|f(x)| \leqslant F(x)$, więc ma całkę zbieżną.

Niech $\varepsilon > 0$ i niech $b > a$ będzie tak duże, by

$$\int_b^\infty F(x)\,dx < \varepsilon.$$

Wtedy

$$\left| \int_a^\infty f(x)\,dx - \int_a^\infty f_n(x)\,dx \right| \leqslant \left| \int_a^b f(x) - \int_a^b f_n(x)\,dx \right| + 2\varepsilon$$

oraz dzięki jednostajnej zbieżności na przedziałach domkniętych

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

co dowodzi naszej tezy. □

9.63. Wniosek. *Funkcja Γ Eulera jest ciągła na $(0,\infty)$.*

Dowód. Udowodnimy ciągłość funkcji Γ_2. W przypadku Γ_1 postępuje się analogicznie.

Niech $x_0 > 0$ i niech $x_n \to x_0$. Wprowadźmy funkcje

$$f_n(t) = t^{x_n - 1} e^{-t}.$$

Wiemy, że $f_n \implies f_0$ na każdym przedziale $[1,b]$. Z drugiej strony

$$f_n(t) \leqslant t^c e^{-t},$$

gdzie $c = \sup\{x_n : n \in \boldsymbol{N}\}$. Jako że funkcja $F(t) = t^c e^{-t}$ ma zbieżną całkę, wnosimy, że

$$\lim_{n\to\infty} \Gamma_2(x_n) = \lim_{n\to\infty} \int_1^\infty f_n(t)\,dt = \int_0^\infty f_0(t)\,dt = \Gamma_2(x_0),$$

co dowodzi ciągłości Γ_2. □

Kończymy ten rozdział prostym, ale bardzo ważnym kryterium całkowym zbieżności szeregów, które można wykorzystywać także jako kryterium zbieżności całek. Ustala ono równoważność pomiędzy zbieżnością pewnych szeregów i pewnych całek niewłaściwych.

9.64. Kryterium (całkowe). Niech będzie dana dodatnia funkcja malejąca f na $[1,\infty)$. Wówczas

$$\int_1^\infty f(x)dx < \infty \iff \sum_{n=1}^\infty f(n) < \infty,$$

a dokładniej

$$\sum_{n=2}^N f(n) \leqslant \int_1^N f(x)\,dx \leqslant \sum_{n=1}^N f(n), \qquad N \in \boldsymbol{N}.$$

Zwróćmy uwagę, że kryterium to rzuca światło na podobieństwo pomiędzy zagadnieniem zbieżności szeregów liczbowych i podobnym zagadnieniem dla całek niewłaściwych.

9.65. Wniosek. *Niech $\alpha \in \boldsymbol{R}$. Wtedy*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} < \infty \iff \int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} < \infty.$$

Zadania

1. Dla funkcji f i g niech $f \vee g = \max\{f, g\}$, $f \wedge g = \min\{f, g\}$. Pokaż, że

$$f + g = f \vee g + f \wedge g.$$

Udowodnij też, że jeśli f i g są ograniczone na przedziale domkniętym, to

$$\int_\star f + \int_\star g \leqslant \int_\star f \vee g + \int_\star f \wedge g.$$

2. Funkcja f jest całkowalna na odcinku I. Pokaż, że także funkcje $\sin f$ i $\sqrt{|f|}$ są całkowalne.

3. Pokaż, że wartości podanych niżej ciągów są równe sumom całkowym odpowiednio dobranych funkcji i w ten sposób oblicz granice tych ciągów:

$$a_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}, \qquad b_n = \sum_{k=n+1}^{3n} \frac{1}{k}, \qquad c_n = n^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^3 + k^3}, \qquad d_n = \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{k}{n^2}.$$

4. Niech $f : [a, b] \to \boldsymbol{R}$ będzie funkcją ograniczoną. Udowodnij, że jeśli f jest całkowalna na odcinkach $[a, c]$ i $[c, b]$, gdzie $a < c < b$, to f jest całkowalna na $[a, b]$.

5. Korzystając z poprzedniego zadania, udowodnij, że funkcja ograniczona mająca tylko skończenie wiele punktów nieciągłości jest całkowalna.

6. Niech $f : [a, b] \to \boldsymbol{R}$ będzie funkcją ograniczoną, której punkty nieciągłości tworzą ciąg zbieżny. Pokaż, że funkcja f jest całkowalna.

7. Oblicz $\int_0^a [x] dx$, $\int --1^1 \sigma(x) x^4 dx$.

8. Pokaż, że funkcja $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ dla $x \neq 0$ i $f(0) = 0$ jest całkowalna na odcinku $[-1, 1]$.

9. Wiedząc, że funkcja $f : [-1.1] \to \boldsymbol{R}$ jest całkowalna, udowodnij całkowalność funkcji $g(x) = f(|x|)$ i pokaż, że $\int_{-1}^1 g(x)dx = 2\int_0^1 f(x)dx$.

10. Funkcja $f : [a, b] \to \boldsymbol{R}$ jest ciągła i nieujemna. Udowodnij, że $\int_a^b f(x)dx = 0$ pociąga $f = 0$.

11. Niech $f \in C([a, b])$. Udowodnij, że $\int_I f = 0$ dla każdego odcinka domkniętego $I \subset [a, b]$ pociąga $f = 0$.

12. Wykaż, że jeśli funkcja $g : [a, b] \to [0, 1]$ jest całkowalna, a $f : [0, 1] \to \boldsymbol{R}$ lipschitzowska, to $f \circ g$ jest całkowalna.

13. Sprawdź, że każda funkcja wypukła na odcinku domkniętym jest całkowalna.

14. Pokaż, że

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 x dx = \int_0^{2\pi} \cos^2 x dx = \pi.$$

15. Niech $\{w_n\}$ będzie ciągiem wszystkich liczb wymiernych odcinka $[0, 1]$. Niech f będzie funkcją Riemanna. Pokaż, że $\lim_{n\to\infty} f(w_n) = 0$.

16. Udowodnij, że funkcja Riemanna $f : [0, 1] \to \boldsymbol{R}$ jest całkowalna i oblicz jej całkę.

17. Czy każdą funkcję ciągłą na odcinku domkniętym można przedłużyć do funkcji ciągłej na całej prostej?

18. Oblicz pochodne funkcji $F(x) = \int_0^x \sin tx\, dt$, $G(x) = \int_0^x e^{tx} dt$.

19. Wiedząc, że funkcja $g : [0, \infty)$ jest rosnąca, wykaż że funkcja $h(x) = \int_0^x g(t)dt$ jest wypukła, a funkcja $f(x) = \frac{1}{x}\int_0^x g(t)dt$ jest rosnąca.

20. Oblicz całki nieoznaczone:

$$\int \frac{x^2dx}{1+x^2}, \int \frac{x^2dx}{1-x^2}, \int \operatorname{tg}^2 x dx, \int \operatorname{tgh}^2 x dx, \int \sqrt{1-\sin 2x}\, dx, \int \sqrt[3]{1-3x}\, dx,$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{2-5x}}, \int \frac{dx}{2+3x^2}, \int \frac{dx}{2-3x^2}, \int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}, \int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}}, \int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+2}}.$$

21. Znajdź całki nieoznaczone:

$$\int \frac{x^2+1}{x^4+1}dx, \int \frac{x^2-1}{x^4+1}dx, \int \frac{x^2dx}{x^4+1}, \int \frac{x^3dx}{x^4+1}, \int \frac{dx}{x^4+1}, \int \frac{x+1}{x^4+1}\, dx.$$

[Aby obliczyć pierwszą całkę, skorzystaj z podstawienia $y = x - 1/x$.]

22. Całkując przez części znajdź

$$\int x^n \log x\, dx, \int \left(\frac{\log x}{x}\right)^2 dx, \int \sqrt{x}\log^2 x\, dx, \int \operatorname{arc\,tan} x\, dx, \int \operatorname{arc\,sin} x\, dx,$$
$$\int x \operatorname{arc\,tan} x, dx, \int \log(x+\sqrt{1+x^2})dx, \int \sin x \log(\operatorname{tg} x)dx, \int x \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)dx.$$

23. Scałkuj funkcje wymierne:

$$\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}\, dx, \int \frac{x\, dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}, \int \frac{x^{10}\, dx}{x^2+x-2}, \int \frac{dx}{x^3-1},$$
$$\int \frac{dx}{x^4-1}, \int \frac{x^4\, dx}{x^4+5x^2+4}, \int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}, \int \frac{dx}{x^4+x^2+1}, \int \frac{x^n}{1+x^{n+1}}.$$

24. Scałkuj funkcje trygonometryczne:

$$\int \cos^5 x\, dx, \int \sin^6 x\, dx, \int \sin^2 x \cos^4 x\, dx, \int \sin^4 x \cos^5 x\, dx, \int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\, dx,$$
$$\int \frac{dx}{\sin^3 x}, \int \sin 5x \cos x\, dx, \int \frac{dx}{\sin x - 1}, \int \frac{dx}{\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}}, \int \operatorname{tg}^3 x\, dx.$$

25. Oblicz $\int_{-1}^1 \sinh nx \cdot \sinh mx\, dx$ dla $n, m \in \boldsymbol{N}$ i udowodnij, że funkcje a) $\{\cos kx\}_{k=0}^n$, b) $\{\sinh kx\}_{k=0}^n$, c) $\{\cosh kx\}_{k=0}^n$ d) $\{e^{kx}\}_{k=0}^n$ tworzą układ liniowo niezależny dla każdego $n \in \boldsymbol{N}$.

26. Oblicz a) $\int_0^n [x] \sin \pi x\, dx$, b) $\int_0^m \mathbf{m}(x) \sin \pi x\, dx$.

27. Pokaż, że ciąg $u_n = \binom{n-1/2}{n} = 4^{-n}\binom{2n}{n}$ jest malejący i dąży do zera. [Skorzystaj ze wzoru Wallisa.]

28. Korzystając ze wzoru Wallisa, zbadaj zbieżność szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^\infty \binom{2n}{n} x^n$ na końcach przedziału zbieżności.

29. Pokaż, że $\lim_{n\to\infty} \int_0^a \sin nx\, dx = 0$ dla każdego $a \in \boldsymbol{R}$.

30. Udowodnij, że

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \int_0^1 (1-x^2)^n\, dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}}.$$

31. Korzystając ze wzoru Stirlinga udowodnij, że
$$\lim_{n\to\infty} 1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)\cdot\left(\frac{e}{2n}\right)^n = \sqrt{2}.$$

32. W pole pod hiperbolą $y = 1/x$ na odcinku $[n, n+1]$ wpisz dwa trapezy wyznaczone przez proste $x = n$, $x = n + 1/2$ i $x = n + 1$ oraz styczne do hiperboli w punktach $x = n + 1/4$, $x = n + 3/4$ i prostą $y = 0$, a następnie porównując sumę ich pól z polem pod hiperbolą, udowodnij nierówność
$$\log\left(1+\frac{1}{n}\right) > \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1/2}+\frac{1}{n+3/4}\right) > \frac{1}{n+1/2}.$$

33. Sprawdź, że $\sum_{n=1}^{\infty}\binom{n-1/2}{n}^{7/3} < \infty$.

34. Niech $a > |b|$. Pokaż, że $(a+b)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}a^{\alpha-n}b^n$ dla każdego $\alpha \in \boldsymbol{R}$.

35. Oblicz całkę
$$\int_0^1 x^n \log^n x\, dx, \qquad n \geqslant 0.$$

36. Oblicz na dwa sposoby całkę nieoznaczoną $\int\sqrt{1+x^2}\,dx$ stosując podstawienie a) Eulera, b) hiperboliczne. Porównaj otrzymane wyniki.

37. Oblicz całki
$$\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}}, \qquad \int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}, \qquad \int x\sqrt{x^2-2x+2}\,dx,$$

38. Niech $f \in C([0,\pi])$. Pokaż, że istnieje przedział $[a,b] \subset [0,\pi]$, taki że $\int_0^\pi f(x)\sin x\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$.

39. Zapisz w postaci całkowej resztę R_n rozwinięcia Maclaurina funkcji wykładniczej.

40. Korzystając z postaci całkowej reszty Taylora funkcji $f \in C^m(a)$, wyprowadź znany wzór
$$\frac{d}{dx}R_m(f)(x) = R_{m-1}(f')(x), \qquad m \geqslant 2.$$

41. Pokaż, że resztę R_n rozwinięcia Taylora funkcji f n-krotnie różniczkowalnej w otoczeniu punktu a można zapisać w postaci
$$R_n(h) = \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}\int_0^\xi f^{(n)}(a+s)ds$$
dla pewnego $\xi = \xi(h) \in (0,h)$. [Zastosuj trzecie twierdzenie o wartości średniej.]

42. Stosując podstawienie $\frac{1}{z} = 1 + x^n$, pokaż, że $\int_0^a \frac{dx}{1+x^n} = \frac{1}{n}\int_{\frac{1}{1+a^n}}^1 z^3(1-z)^{\frac{1}{n}-1}dz$.

43. Oblicz długość łuku a) paraboli $y = x^2$ pomiędzy punktami o odciętych 0 i 1, b) krzywej łańcuchowej $y = \cosh x$ pomiędzy punktami o rzędnych 1 i 2.

44. Oblicz pole i obwód figury $F = \{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant 1, x^2 \leqslant y \leqslant e^x\}$.

45. Zbuduj przykład ciągu funkcji ciągłych f_n na odcinku $[0,1]$ zbieżnego punktowo do zera, dla którego ciąg całek $\int_0^1 f_n$ nie dąży do zera. [W tym celu zmodyfikuj przykład podany na wykładzie.]

46. Oblicz z definicji całki niewłaściwe:
$$\int_0^\infty e^{-x}dx, \quad \int_0^\infty\frac{dx}{1+x^2}, \quad \int_0^1\frac{1+x}{\sqrt{x}}, \quad \int_0^1\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx.$$

47. Wykaż, że podane całki są rozbieżne:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}, \quad \int_0^1 \frac{dx}{x}, \quad \int_0^\infty \sin x\, dx, \quad \int_1^\infty \frac{e^x}{x^{100}} dx, \quad \int_2^\infty \frac{dx}{\log^4 x}, \quad \int_2^\infty \frac{dx}{x \log x}.$$

48. Oblicz całki

$$\int_0^1 \log x dx, \quad \int_0^\infty x e^{-x} dx, \quad \int_0^1 x \log x dx, \quad \int_0^\infty e^{-x} \sin x\, dx, \quad \int_0^\infty x e^{-x} \sin x\, dx.$$

49. Uzasadnij zbieżność całek

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{1+x^2} dx, \quad \int_0^\infty e^{-x^2} dx, \quad \int_0^1 \frac{\log x}{1+x} dx, \quad \int_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt{x}}-1}, \quad \int_0^1 \frac{x dx}{e^x - 1}, \quad \int_1^\infty \frac{\log x}{1+x^4} dx.$$

50. Pokaż, że ciąg $\varphi_n(x) = (1 + \frac{x}{x})^n e^{-2x}$ jest zbieżny monotonicznie i jednostajnie.

51. Pokaż, że $\left| \sum_{k=1}^n \sin nx \cdot \sin n^2 x \right| \leqslant 1$ dla każdego $x \in \boldsymbol{R}$ i każdego $n \in \boldsymbol{N}$.

52. Udowodnij, że podane szeregi są jednostajnie zbieżne na $\boldsymbol{R}$:

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{\sin nx}{n+x^2}, \quad \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n \sin nx}{n+x^2}, \quad \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n \sin nx}{\sqrt{n}+x^4} (1+\frac{x}{n})^n e^{-2x}. \quad \sum_{n=1}^\infty \frac{\sin nx \sin n^2 x}{n+x^2}.$$

53. Pokaż, że szereg $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n^x}$ jest zbieżny jednostajnie na $[1, \infty)$.

54. Wykaż, że szereg $\sum_{n=1}^\infty \frac{x \sin(n^2 x)}{n^2}$ definiuje funkcję ciągłą na $\boldsymbol{R}$, a szereg $\sum_{n=1}^\infty \log^n(1+x)$ funkcję ciągłą na $(\frac{1}{e} - 1, e - 1)$.

55. Wykaż, że szereg $\sum_{n=1}^\infty \int_0^{x/\sqrt{n}} \log(1+u^2)\, du$ definiuje funkcję różniczkowalną na $(0, \infty)$.

56. Niech $f \in C^1(\boldsymbol{R})$ spełnia $|f(x)| \leqslant C(1+|x|)^{-1}$ i $|f'(x)| \leqslant (1+|x|)^{-2}$ dla wszystkich $x \in \boldsymbol{R}$ i pewnej stałej $C > 0$. Całkując przez części, udowodnij, że

$$\lim_{\alpha \to 0+} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} f(t)\, dt = f(0).$$